МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО


К. К. Боярский

А. В. Смирнов

О. Б. Прищепенок


# Механика часть 1.

## Кинематика, динамика

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по направлениям подготовки 09.03.01.09.03.02. 01.0302.09.03.03, 09.03.04, 10.03.01, 11.03.02, 11.03.03, 12.03.05, 12.03.01, 12.03.02, 12.03.03, 14.03.01, 13.03.02, 15.03.06, 16.03.01, 24.03.02, 27.03.04, 18.03.02, 19.03.01
в качестве учебно-методического пособия для реализации основных профессиональных образовательных программ высшего образования бакалавриата, специалитета

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО


Санкт-Петербург

2018

Боярский К. К., Смирнов А. В., Прищепенок О. Б. – СПб: Университет ИТМО, 2018. – 76 с.

Рецензент: Фролов В.М., к.ф.-м.н., доцент

В рамках курса общей физики рассмотрены вопросы таких разделов механики, как кинематика, динамика, импульс, инерциальные и неинерциальные системы отсчета. В приложении приведены необходимые сведения из математики, в частности, векторной алгебры. Особое внимание уделено логике исторического развития науки, что способствует цельности восприятия физической картины мира.

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

**Университет ИТМО** – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

**Оглавление**

# 1 Введение

## 1.1 Немного истории

Зачатки науки появились еще в древнейшие времена — в Шумере, Древнем Египте, Китае, Индии. Практические потребности людей привели к возникновению старейших наук — астрономии и математики. Конечно, в древних государствах астрономия и математика находились в зачаточном состоянии, представляя собой совокупность отрывочных сведений, отдельных рецептов и правил. Если создать практически полезную модель явления природы не удавалось, её заменяли религиозные мифы (например, «молния есть гнев богов», «затмение Солнца вызвано происками дракона», «разливы Нила — заслуга бога Хапи»).

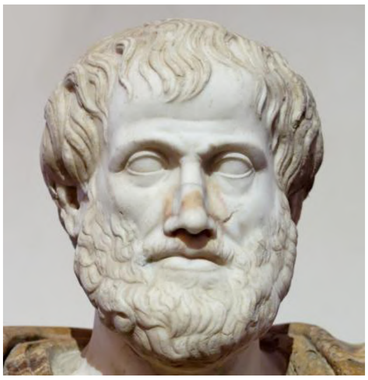
Следующим этапом в развитии науки было появление натурфилософии, особое влияние на последующее развитие физики оказала древнегреческая натурфилософия, которая пыталась (в основном качественно) объяснять причины явлений. Была впервые сделана попытка обобщить накопленные к тому моменту знания о природе и построить единую картину мира. Греческим философам принадлежат фундаментальные идеи о неуничтожимости материи и движения о всеобщей причинности, о единых основаниях всех наблюдаемых явлений и др. Эмпедокл (V в. до н. э.) полагал, что все вещи состоят из четырех элементов: земли, воды, воздуха и огня. Ему же принадлежит первая формулировка закона сохранения материи:

*Ничто не может произойти из ничего, и никак не может то, что есть, уничтожиться*

Демокрит (V–IV вв. до н. э.) считал, что все существующее состоит из атомов ($\alpha\tau o\mu o\zeta$ — неделимый) и пустоты. В отличие от элементов Эмпедокла, атомы Демокрита лишены внутреннего строения, а наблюдаемое различие тел возникает как результат различных сочетаний атомов?

Демокрит
460–370 гг. до н. э.

Аристотель (IV в. до н. э.) одно из своих сочинений назвал «Физика» (φύσις physis — природа). Предметом физики, по мнению Аристотеля, является выяснение первопричин природных явлений. В своей картине мира Аристотель базировался на представлении о четырех элементах (стихиях). Им был сформулирован ряд физических постулатов, среди которых были утверждения о том, что в ответ на действие силы тело движется прямолинейно с постоянной скоростью; каждая точка пространства заполнена материей (эфиром), следовательно, материя не может состоять из атомов (между атомами была бы пустота, а природа не терпит пустоты); планеты совершают круговое движение вокруг центра Вселенной — Земли и т. д. Теория Аристотеля оставалась главенствующей в физике более полутора тысяч лет.



Аристотель

384–322 гг. до н. э.

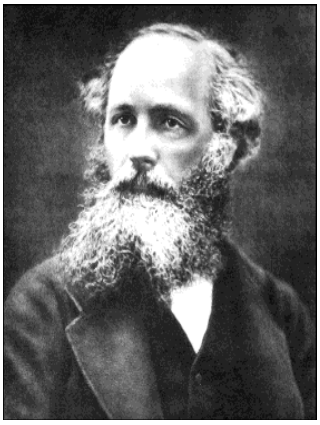
Однако, средств для проверки теоретических моделей и выяснения вопроса, какая из них верна, в те времена было крайне мало, даже если речь шла о земных каждодневных явлениях. Физические величины, которые умели тогда достаточно точно измерять, — вес, длина и угол.

Знаменательный скачок в развитии физики произошел в XVI веке. Появилась гелиоцентрическая система мира Коперника. Эксперименты Галилея, теоретические расчеты Кеплера и других ученых заложили фундамент физики как науки в современном понимании. Усовершенствуется измерительная техника, появляется телескоп. Маятниковые часы (Гюйгенс, вторая половина XVII века) впервые дают возможность измерения времени с приемлемой точностью (Галилей во время некоторых своих опытов отсчитывал время по собственному пульсу). Проводятся первые исследования по электромагнетизму.

Основополагающим шагом в создании классической механики стало появление в 1686 году книги Ньютона «Математические начала натуральной философии». Ньютон заложил основы механики, оптики, теории тяготения, небесной механики, открыл и далеко продвинул математический анализ. Изложенные Ньютоном законы имеют всеобщий характер, так что исчезли основания для разделения физики на земную и «небесную», а система Коперника—Кеплера получила прочную динамическую основу.

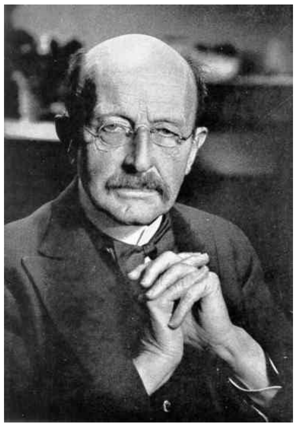
И. Ньютон
1643–1727

Последователи Ньютона пытались объяснить различные физические явления, сопоставив им различного рода силы: электрические, магнитные, химические и др. Но предполагалось, что в своей основе эти силы подчиняются законам механики или аналогичным им.



Дж. Максвелл
1831–1879

Существенное изменение физических воззрений произошла в XIX веке благодаря развитию оптики, теории электромагнетизма и теплоты. Постепенно укреплялось мнение, что не все явления природы объясняются законами механики. Максвелл в своем труде «Трактат об электричестве и магнетизме» (1873 г.) привел полную систему уравнений, описывающих новый физический объект — электромагнитное поле, объединяющее электричество, магнетизм и свет. Однако первоначально электромагнитные явления трактовали как механические процессы в упругом эфире. Тем не менее, на смену убеждению, что все физические явления имеют механическую природу, стало приходить убеждение, что в основе большинства из них лежат электромагнитные силы.



М. Планк
1858–1947

Самая радикальная революция в физике произошла в период с конца XIX до конца первой трети XX века: постоянство скорости света в вакууме, периодичность системы элементов, радиоактивность, электрон, изотопы, рентгеновское излучение, атомное ядро, протоны, нейтроны, кванты. Была открыта радиоактивность (1896 г, Беккерель), обнаружено, что химические элементы могут превращаться друг в друга (1903 г, Резерфорд и Содди) Затем Планк ввел понятие о дискретности энергии (1900 г) — начала развиваться квантовая механика. Эйнштейн подверг сомнению неизменность пространства и времени — возникла теория относительности. Полностью изменились представления об устройстве мира на микроуровне. Это дало толчок к взрывному развитию различных областей техники, промышленности и самой науки.

Развитие физики продолжается, углубляя наши знания о мире и приводя к появлению принципиально новых технических устройств и технологий.

## 1.2 Физические величины и единицы

Физические величины, описывающие качественные свойства материальных объектов и явлений, могут быть разделены на несколько основных классов, среди которых важнейшими являются:

- Скалярные величины (скаляры) — характеризуются только своим численным значением. Примеры скалярных механических величин: время, длина, масса, энергия...
- Векторные величины (векторы) — помимо численного значения характеризуются также направлением в пространстве. Примеры векторных механических величин: скорость, ускорение, сила, угловая скорость... Некоторые сведения о математических свойствах векторов приведены в приложении.

Эффективность развития и применения любого раздела современной науки (физики, химии, биологии и т. д.) основана на возможности математически сформулировать соответствующие законы. Что в свою очередь требует умения измерять величины, связываемые формулируемыми законами. Разнообразие единиц измерения упорядочивается при помощи систем единиц измерения. В системе вводится ограниченный перечень единиц, которые принимается за основные, а все остальные единицы, называемые производными, выводятся из основных при помощи уравнений связи.

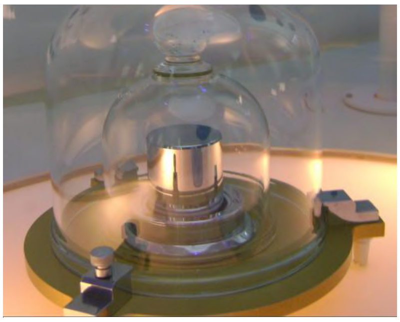
Современная система единиц измерений СИ (le Systéme International d'Unités (фр.)) берет свое начало в XVIII во Франции. Именно тогда комиссия из известнейших ученых предложила свою десятичную метрическую систему мер. В настоящее время в большинстве стран мира в качестве основной принята система СИ, в которой в качестве основных единиц выбрано семь: килограмм (масса), секунда (время), метр (длина), ампер (сила тока), кельвин (температура), моль (количество вещества), кандела (сила света). В механике используются три первые из них.

Средство измерений (комплекс средств измерений), предназначенное для воспроизведения единицы измерения, ее хранения и передачи ее размера другим средствам измерений называется эталоном (измерительным стандартом) единицы физической величины.

Метрологические службы подавляющего большинства государств для научных и промышленных целей поддерживают иерархическую систему эталонов разного уровня, согласованных друг с другом. При этом государственный первичный эталон (национальный эталон) каждой измеряемой величины согласовывается с международным эталоном, принятым в качестве такого по международному соглашению.

Ниже обсуждаются международные эталоны основных единиц измерения механических величин.

### 1.2.1 Эталон массы



Эталон килограмма

Эталон массы остается неизменным с 1889 года – это платиново-иридиевая гиря. При изготовлении этой гири предполагалось, что ее масса должна совпадать с массой 1дм$^3$ чистой воды при температуре 0°С. Всего было изготовлено 42 эталона, два из которых отправились в Россию. Сущность измерительной операции при сравнении международного и национальных эталонов осталась прежней и сводится к сравнению двух масс при взвешивании. Изобретены сверхчувствительные весы, растет точность взвешивания, и точность сравнения существующих эталонов уже не удовлетворяет современным потребностям науки и техники, поэтому во многих метрологических лабораториях мира ведутся интенсивные поиски путей определения эталона массы с помощью фундаментальных физических свойств.

### 1.2.2 Эталон времени

Уже за 2000 лет до нашей эры в Древнем Египте сутки делились на дневную и ночную половины по 12 часов. В дальнейшем было принято шестидесятеричное деление, т. е. час делился на 60 минут, минута — на 60 секунд. Однако до появления механических часов это деление носило несколько абстрактный характер.

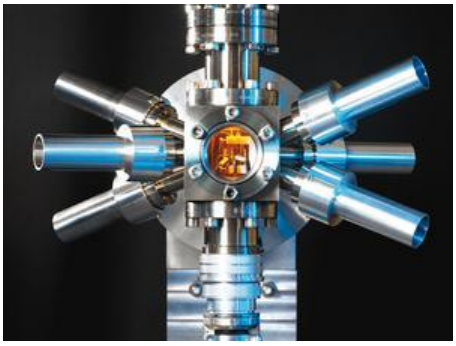
Маятниковые часы с секундной стрелкой появились только во второй половине XVI века. Однако было обнаружено, что показания таких часов в разных точках Земли различаются (из-за различия в силе тяготения). В XIX веке было принято определение секунды как 1/86400 средних солнечных суток.

В 1956 году определение секунды было скорректировано и привязано к понятию «года» (период обращения Земли вокруг Солнца), поскольку к тому времени стало известно, что вращение Земли вокруг своей оси не может быть использовано в качестве достаточно надёжного основания, в виду того, что это вращение замедляется, а также подвержено нерегулярным скачкам. Таким образом, секунда получила следующее определение:

«1/31 556 925,9747 доля тропического года для 0 января 1900 в 12 часов эфемеридного времени».

Однако оказалось, что и период обращения Земли не слишком стабилен и от десятилетия к десятилетию может меняться на десятки секунд. Поэтому было решено перейти к реализации секунды на основе атомных часов. В 1967 году секунда была определена так:

> **«Секунда есть время, равное 9 192 631 770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя заданными сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133»**.



Эталон времени

В течение 1970-х годов было обнаружено, что гравитационное замедление времени влияет на секунды, отсчитываемые атомными часами, в зависимости от их возвышения над поверхностью Земли. Универсальная секунда была получена путём корректировки значений каждых атомных часов приведением их к среднему уровню моря, удлиняя таким образом секунду примерно на $1{\cdot}10^{-10}$. Современные атомные часы имеют точность порядка $10^{-15}$, что соответствует уходу на одну секунду за 30 миллионов лет.

### 1.2.3 Эталон длины

Несмотря на очевидную необходимость измерения расстояний, размеров предметов и т. д., до конца XVIII века международной стандартной меры длины не существовало. Первая серьезная попытка ввести эталон длины была предпринята во Франции в 1790 г. с определением

«метр — это длина маятника с полупериодом колебаний на широте $45^\circ$, равным 1 с» (в современных единицах 0,994 м).

Эталон метра (до 1960 г.)

Однако идея увязки измерения длины и времени тогда не нашла поддержки и в 1795 г. при введении метрической системы было принято определение:

«метр равен одной сорокамиллионной части Парижского меридиана».

В том же году был изготовлен первый эталон метра.[1]

В 1960 было решено отказаться от использования изготовленного людьми предмета в качестве эталона метра, и с этого времени метр определялся как

«1 650 763,73 длин волн оранжевой линии, излучаемой изотопом криптона $^{86}$Kr в вакууме».

Значительный прогресс, достигнутый в определении скорости света, а также тот факт, что, в соответствии с теорией относительности, эта скорость постоянна и не зависит от каких-либо внешних факторов, позволил с 1983 г. дать новое определение метра:

> **«метр есть длина пути, проходимого светом в вакууме за (1/299 792 458) секунды»**.

Таким образом, в настоящее время-международный эталон длины как размер некоторого эталонного тела не существует, а процедура его воспроизведения тесно связана с измерением времени.

## 1.3 Модели в механике

> «Законы математики, имеющие какое-либо отношение к реальному миру, ненадежны; а надежные математические законы не имеют отношения к реальному миру»
>
> *А. Эйнштейн*

> «Математика, подобно жернову, перемалывает то, что под него засыпают, и как, засыпав лебеду, вы не получите пшеничной муки, так, исписав целые страницы формулами, вы не получите истины из ложных предпосылок»
>
> *Т. Гексли*

Слово «механика» (греч. μηχανικη) первоначально обозначало искусство построения машин. Впоследствии значение этого термина расширилось, и под механикой стали понимать раздел физики, изучающий движение тел и взаимодействие между ними.

Положение тела в пространстве можно определить только по от-

[1] Единица массы (килограмм, определение которого было основано на массе 1 дм$^3$ воды), тоже была привязана к определению метра.

ношению к другим телам, т. е. движение тел всегда ОТНОСИТЕЛЬНО. Практически какое-либо из тел выбирают в качестве ТЕЛА ОТСЧЕТА и связывают с ним систему координат. Для измерения времени с каждой точкой пространства связывают также некие абстрактные часы, неподвижные относительно тела отсчета.

Совокупность тела отсчета, связанной с ним системы координат, и синхронизированных между собой часов называется СИСТЕМОЙ ОТСЧЕТА.

Окружающая нас природа бесконечно сложна, поэтому для ее изучения приходится прибегать к моделированию. Модель в физике — «эквивалент» объекта и физической ситуации, отражающий важнейшие их свойства. Выбор модели определяется конкретной решаемой задачей и может быть весьма непростым.

Широко известной «моделью» с предельным упрощением реальной ситуации является определение победителя на скачках с помощью решения задачи о движении сферического коня в вакууме. Однако рассмотрим менее пародийные случаи.

Со времен Галилея известно, что тела, брошенные под углом к горизонту, под действием силы тяжести должны двигаться по параболе. Однако первые попытки составить на основе этого закона таблицы стрельбы для артиллерии потерпели крах. Причина очевидна: галилеевская модель движения тела не учитывала сопротивление воздуха. Повышение точности расчетов сопровождается усложнением модели, учетом все новых факторов. Так сопротивление воздуха зависит от формы снаряда и метеоусловий, вращение Земли приводит к отклонению траектории в сторону, так же в сторону отклоняется снаряд из-за вращения в полете и т. д.

Но излишнее переусложнение модели тоже вредно. Например, при расчете движения теннисного мяча вращение Земли точно можно не учитывать, а вот вращением самого мяча нельзя пренебрегать ни в коем случае.

Для самого движущегося объекта в классической механике широко используются следующие две модели (идеализации):

- **Материальная точка** — тело, размерами которого можно пренебречь в условиях данной задачи.
- **Абсолютно твердое тело (АТТ)** — система материальных точек, расстояние между которыми не меняется в процессе движения (деформации в процессе движения пренебрежимо малы).

Разумеется, применимость этих моделей тоже определяется конкретной задачей. Например, при решении задачи о движении Земли вокруг Солнца, Земля может считаться материальной точкой. При решении задачи о перелете самолета из Петербурга во Владивосток, самолет может считаться точечным, а Земля — нет. А вот при анализе полета самолета пренебрегать его размерами ни в коем случае нельзя.

### 1.3.1 Основные постулаты классической механики

Теоретический аппарат классической механики базируется на нескольких постулатах[1], которые являются обобщением экспериментальных фактов. Важнейшие из этих постулатов: состоят в утверждении, что *пространство однородно и изотропно, время однородно*.

- **Однородность пространства** означает, что свойства пространства одинаковы во всех точках. Если замкнутую систему тел как целое перенести из одного области пространства в другую, то это не повлияет на физические процессы, происходящие в системе, в частности, не повлияет на взаимное движение тел. Результаты любого физического эксперимента в одних и тех начальных условиях не зависят от места в пространстве, где он был произведён. Можно показать, что из свойства однородности пространства следует фундаментальный физический закон сохранения импульса.
- **Изотропность пространства** означает одинаковость свойств пространства по всем направлениям, т. е. поворот любой замкнутой физической системы как целого не повлияет на физические процессы, происходящие в системе. Из свойства изотропности пространства вытекает фундаментальный физический закон сохранения момента импульса.
- **Однородность времени** означает, что все моменты времени равноправны, т. е. изменение момента начала любого физического эксперимента при одинаковых начальных условиях не влияет на его результат, то есть физическое явление, осуществлённое в какой-нибудь момент времени может быть в точности воспроизведено в любой последующий момент времени. Из свойства однородности времени следует фундаментальный физический закон сохранения энергии.

На основе этих постулатов и экспериментальных данных выводятся законы механики.

---

[1] Постулат — исходное положение, принимаемое без доказательств.

Все многообразие механических явлений и, соответственно, методы их исследования могут быть условно поделены на четыре области (рис. 1.1).


**Рис. 1.1**. Области применимости физических законов и моделей

В каждой из этих областей проявляются разные свойства материальных объектов и разные законы их движения, поэтому в каждой из областей используются свои модели и свой математический аппарат.

# 2 Кинематика

## 2.1 Кинематика материальной точки

### 2.1.1 Основные кинематические характеристики движения

Кинематикой называется раздел механики, изучающий движение тел, независимо от причин, вызывающих это движение.

При движении материальная точка движется в пространстве по некоторой линии, которая называется **траекторией** ($l$ на рис. 2.1).

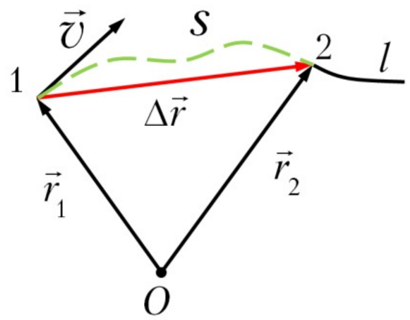



**Рис. 2.1**. Движение материальной точки.

В зависимости от формы этой линии различают движение прямолинейное, криволинейное, по окружности и т. д.

Если тело переместилось из точки 1 в точку 2, то **расстояние** между этими точками, **измеренное вдоль траектории**, представляет собой **пройденный путь** ($S$ на рис. 2.1). **Вектор**, проведенный из начальной точки в конечную, называется **перемещением** ($\Delta\vec{\mathbf{r}}$ на рис. 2.1). Таким образом, путь и перемещение представляют собой две совершенно разных величины: путь — скаляр, при движении точки может только увеличиваться; перемещение — вектор, длина которого может как возрастать, так и уменьшаться, помимо длины перемещение характеризуется также направлением.

Существует три способа описания движения точки: векторный, координатный и траекторный (или естественный).

### 2.1.2 Векторный способ описания движения

В векторном способе положение точки задается радиус-вектором $\vec{\mathbf{r}}$, проведенным из начала координат (рис. 2.2). Перемещение при этом определяется как

$$\Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1. \qquad (2.1)$$

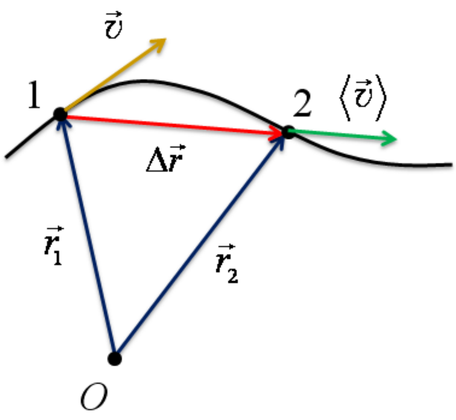



**Рис. 2.2**. Векторный способ. Мгновенная и средняя скорость.

**Скоростью** называется векторная физическая величина, характеризующая быстроту перемещения и направление движения материальной точки относительно выбранной системы отсчёта; по определению, равна производной радиус-вектора точки по времени

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \vec{\mathbf{r}}'\ t\ . \tag{2.2}$$

Часто в физической литературе производная по времени обозначается точкой сверху без указания переменной, по которой производится дифференцирование, т. е. пишут $\vec{\mathbf{v}} = \dot{\vec{\mathbf{r}}}$. Поскольку величина и направление скорости меняется в процессе движения, эту скорость более полно называют **мгновенной скоростью**. Вектор мгновенной скорости всегда направлен по касательной к траектории (см. рис. 2.2).

Кроме мгновенной скорости, вводят еще понятие **средней скорости**, которая характеризует быстроту изменения положения тела за конечный промежуток времени. Средняя скорость может быть определена двумя способами. Средняя скорость перемещения — это вектор, равный

$$\langle\vec{\mathbf{v}}\rangle = \frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta t}. \tag{2.3}$$

Средняя путевая скорость это скаляр, равный

$$\langle v\rangle = \frac{S}{\Delta t}, \tag{2.4}$$

т. е представляет собой отношение всего пройденного пути ко времени движения.

Отметим, что средняя путевая скорость равна модулю вектора средней скорости по перемещению только при прямолинейном движении. Если говорят о средней скорости, не уточняя, о какой именно идет речь, то обычно имеют в виду среднюю путевую скорость. Действительно, вряд ли кому-то придет в голову сказать, что средняя скорость болидов формулы 1 равна нулю из-за того, что они ездят по кругу.

Размерность скорости очевидна, в СИ это м/с.

**Ускорение** — физическая величина, определяющая быстроту изменения скорости тела, то есть первая производная от скорости по времени. Ускорение является векторной величиной. Как правило, используется понятие мгновенного ускорения, среднее ускорение в физических задачах используется значительно реже.

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} \equiv \vec{\mathbf{v}}'(t) \equiv \vec{\mathbf{r}}''(t) \equiv \ddot{\vec{\mathbf{r}}}\,. \tag{2.5}$$

Размерность ускорения — м/с$^2$.

Таким образом, зная, как меняется положение точки со временем (т. е. зависимость $\vec{\mathbf{r}}(t)$), можно найти скорость и ускорение точки в каждый момент времени.

Возникает и обратная задача: как, зная зависимость ускорения от времени, найти скорость и положение тела. Эта задача решается интегрированием уравнений (2.2) и (2.5):

$$\begin{gathered} \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_0 + \Delta\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_0 + \int_{t_0}^{t_1} \vec{\mathbf{a}}(t)dt \\ \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_0 + \Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_0 + \int_{t_0}^{t_1} \vec{\mathbf{v}}(t)dt \end{gathered}\,. \tag{2.6}$$

Для получения однозначного решения знания функции $a(t)$ недостаточно, нужно еще знать начальные условия, т. е. положение $\vec{\mathbf{r}}_0$ и скорость $\vec{\mathbf{v}}_0$ точки в момент $t = 0$. Например, в частном случае движения тела, брошенного под углом к горизонту, ускорение постоянно ($\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{g}}$), при $\vec{\mathbf{r}}_0 = 0$ имеем (рис. 2.3).

$$\begin{gathered} \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_0 + \vec{\mathbf{g}}t \\ \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_0 + \vec{\mathbf{v}}_0 t + \frac{\vec{\mathbf{g}}t^2}{2} \end{gathered} \tag{2.7}$$

Возможные начальные условия целиком определяются конкретной экспериментальной ситуацией. Так, если тело первоначально находится на горизонтальной поверхности, то условие $\vec{\mathbf{v}}_0 = 0$ невозможно, тело просто никуда не полетит, однако оно вполне может упасть с обрыва с нулевой начальной скоростью.

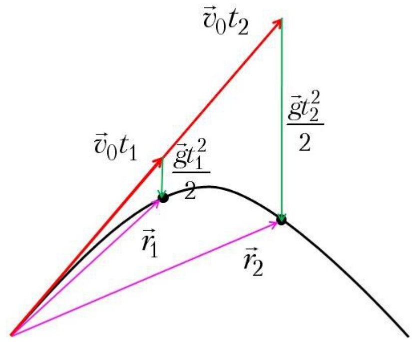



**Рис. 2.3**. Графическая иллюстрация к вычислению радиус-вектора (см. второе уравнение (2.7)) для случая движения тела, брошенного под углом к горизонту

### 2.1.3 Координатный способ описания движения

В этом способе с выбранным телом отсчета связывают определенную систему координат. В декартовых координатах проекции радиус-вектора на оси координат равны x, y и z (рис. 2.4).

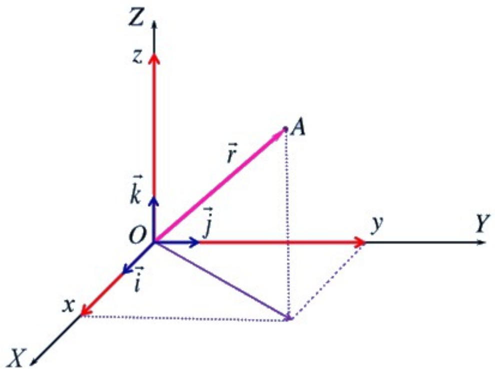



**Рис. 2.4**. Представление радиус-вектора в декартовой системе

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = \vec{\mathbf{i}}x(t) + \vec{\mathbf{j}}y(t) + \vec{\mathbf{k}}z(t). \tag{2.8}$$

Дифференцируя, получаем

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \vec{\mathbf{i}}\frac{dx}{dt} + \vec{\mathbf{j}}\frac{dy}{dt} + \vec{\mathbf{k}}\frac{dz}{dt}. \tag{2.9}$$

Таким образом, проекциями вектора скорости являются производные по времени от соответствующих координат $v_x = \dfrac{dx}{dt}$ и т. д. Модуль (часто говорят величина) мгновенной скорости равна корню из суммы квадратов проекций $v = |v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$, а направление задается направляющими косинусами (см. Приложение). Аналогично проекции ускорения определяются как $a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ и т. д.

В других системах координат ситуация иная. Рассмотрим, например, случай, когда на плоскости задана полярная система координат (рис. 2.5, *а*).

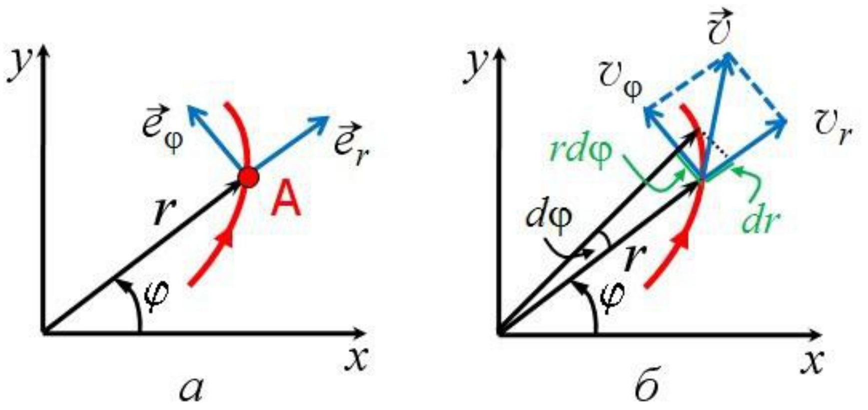



**Рис. 2.5**. Движение точки в полярных координатах

Принципиальным отличием от случая декартовых координат является то, что в процессе движения точки А направление ортов $\vec{\mathbf{e}}_r$ и $\vec{\mathbf{e}}_\varphi$ изменяется. Элементарное перемещение точки $ds$ геометрически складывается из радиального перемещения $dr$ и поперечного перемещения $r\,d\varphi$. Следовательно, скорость будет слагаться из радиальной и поперечной проекций (рис. 2.5, *б*):

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{dr}{dt} = \dot{r} \\ v_\varphi &= r\frac{d\varphi}{dt} = r\dot{\varphi} \end{aligned}. \tag{2.10}$$

Поскольку эти две проекции перпендикулярны друг другу, величина скорости равна

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}\,. \tag{2.11}$$

Аналогично можно получить, что ускорение в полярных координатах запишется как

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2} = \sqrt{\left(\dot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)^2 + \left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\right)^2} \tag{2.12}$$

### 2.1.4 Траекторный способ описания движения

Траекторный способ описания движения применяют в тех случаях, когда траектория движения заранее известна. Эта ситуация настолько часто встречается в жизни, что траекторный способ называют еще естественным. Например, при движении поезда из Петербурга в Москву нас обычно интересует скорость перемещения поезда по рельсам, а не проекции скорости на направления «восток» и «север». При этом, для того чтобы задать положение поезда указывается, например, расстояние вдоль дороги от некоторой начальной точки, которое определяется по указателям на километровых столбах.

Будем задавать положение точки дуговой (траекторной) координатой $l$ — расстоянием вдоль траектории от выбранного начала отсчета. Введем единичный вектор $\vec{\tau}$, связанный с движущейся точкой А и направленный по касательной к траектории в сторону возрастания дуговой координаты (рис. 2.6). Очевидно, что $\vec{\tau}$ — переменный вектор: его направление зависит от $l$.

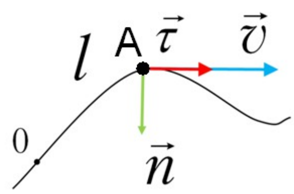



**Рис. 2.6**. Траекторный метод. Скорость точки

Вектор скорости в точке А направлен по касательной к траектории, поэтому его можно записать как

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{dl}{dt}\vec{\tau} = v_\tau \vec{\tau}. \tag{2.13}$$

Вектор скорости может быть направлен как по вектору $\vec{\tau}$, так и в противоположную сторону, но $|v_\tau| = |\vec{\mathbf{v}}| = v$

Для того чтобы найти ускорение, продифференцируем соотношение (2.13):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{dv_\tau}{dt}\vec{\tau} + v_\tau \frac{d\vec{\tau}}{dt}. \tag{2.14}$$

Последний член этого выражения равен

$$v_\tau \frac{d\vec{\tau}}{dt} = v_\tau \frac{d\vec{\tau}}{dl}\frac{dl}{dt} = v_\tau^2 \frac{d\vec{\tau}}{dl} = v^2 \frac{d\vec{\tau}}{dl}. \tag{2.15}$$

При стремлении длины дуги траектории к нулю, эта дуга может быть представлена как дуга окружности с центром в некоторой точке О (рис. 2.7, *а*). Эта точка называется центром кривизны траектории, а радиус окружности $R_{кр}$ — радиусом кривизны.

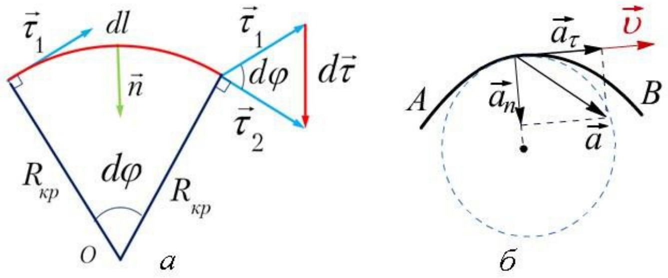



**Рис. 2.7**. К определению ускорения точки

Из рисунка видно, что $d\tau = \tau d\varphi$; $dl = R_{\text{кр}} d\varphi$. Введем единичный вектор нормали к траектории $\vec{\mathbf{n}}$, этот вектор параллелен вектору $d\vec{\tau}$. Окончательно из (2.14) получаем:

$$\vec{a} = \frac{d\upsilon_\tau}{dt}\vec{\tau} + \frac{\upsilon^2}{R_{\text{кр}}}\vec{n}. \tag{2.16}$$

Таким образом, вектор ускорения при представлении его траекторным способом имеет тангенциальную и нормальную компоненты (рис. 2.7, *б*). **Тангенциальное** ускорение отвечает за изменение **модуля** скорости, направлено по касательной к траектории движения. **Нормальное** ускорение отвечает за изменение **направления** вектора скорости, направлено к центру кривизны траектории.

## 2.2 Кинематика твердого тела

### 2.2.1 Виды плоского движения твердого тела

Абсолютно твердое тело (АТТ) было определено во введении как система материальных точек, расстояние между которыми не меняется в процессе движения. Однако с кинематической точки зрения АТТ вовсе не обязано быть «твердым» в бытовом смысле. Модель АТТ в определенных пространственно-временных пределах может быть использована и для описания движения капли жидкости (пока она не деформируется), и для скопления звезд (пока силы тяготения не изменят расстояние между ними).

Простейшим видом движения АТТ является поступательное движение, при котором любая прямая, связанная с телом, все время остается параллельной своему начальному положению (рис. 2.8).

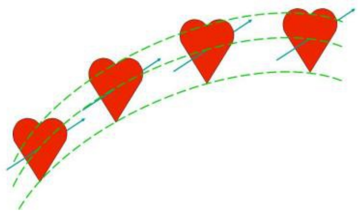


**Рис. 2.8**. Поступательное движение твердого тела

Скорости и ускорения всех точек тела в каждый момент времени одинаковы, поэтому задача о поступательном движении сводится к задаче о движении точки.

### 2.2.2 Вращение вокруг неподвижной оси

Рассмотрим случай, когда твердое тело вращается вокруг неподвижной оси (пусть это будет ось Z) и за бесконечно малый промежуток времени $dt$ совершает поворот на угол $d\varphi$ (рис. 2.9). Будем представлять этот поворот вектором, длина которого равна углу поворота, а направление совпадает с осью Z и определяется правилом правого винта.

Элементарное перемещение точки при таком повороте можно определить с помощью векторного произведения

$$d\vec{\mathbf{r}} = d\vec{\varphi}, \vec{\mathbf{r}} \tag{2.17}$$

Величина перемещения, очевидно, равна

$$dr = r \sin\theta \, d\varphi = R \, d\varphi, \tag{2.18}$$

где $R$ — радиус окружности, по которой движется точка, расстояние точки от оси вращения.

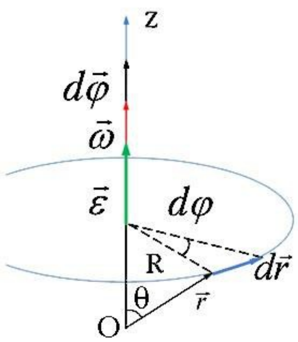



**Рис. 2.9**. Вращение твердого тела

Подчеркнем, что такое векторное представление возможно только для бесконечно малых углов поворота. Это ясно хотя бы из того факта, что сложение векторов есть операция коммутативная, а результат двух последовательных поворотов на конечные углы зависит от порядка их выполнения, в чем убеждался каждый, кто пытался сложить кубик Рубика.

Вектор **угловой скорости** также направлен вдоль оси вращения (рис. 2.9) и определяется как

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \qquad (2.19)$$

Единицей угловой скорости является рад/с, иногда обозначается как $с^{-1}$. При проверке размерностей надо учитывать, что радиан — безразмерная величина.

Аналогично **угловое ускорение** равно

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}. \qquad (2.20)$$

Единицей углового ускорения является рад/с$^2$.

Из (2.17) найдем векторную связь между линейной и угловой скоростями:

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \vec{\mathbf{r}}\right] = \ \vec{\omega}, \vec{\mathbf{r}}\ . \qquad (2.21)$$

Для ускорения получаем:

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{\mathbf{r}}\right] + \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}\right] = \ \vec{\varepsilon}, \vec{\mathbf{r}}\ + \ \vec{\omega}, \vec{\mathbf{v}}\ . \qquad (2.22)$$

В соответствии с правилами определения направления векторного произведения, первое слагаемое в правой части (2.22) представляет собой вектор, направленный по касательной к траектории точки, а второе — по нормали, т. е. к оси вращения. Поэтому (2.22) можно переписать как

$$\vec{a} = \varepsilon R\vec{\tau} + \omega^2 R\vec{\mathbf{n}}, \qquad (2.23)$$

где $\vec{\tau}$ и $\vec{\mathbf{n}}$ — единичные вектора касательной и нормали соответственно. Используя траекторный способ представления движения точки, представим ускорение через тангенциальную и нормальную компоненты:

$$a_\tau = \varepsilon R;\ a_n = \omega^2 R. \qquad (2.24)$$

Отметим, что при вращении твердого тела для всех его точек угловые скорости и ускорения одинаковы, а линейные — нет.

С точки зрения математики, соотношения (2.2) и (2.19), (2.5) и (2.20) показывают, что кинематические формулы для одномерного поступательного и вращательного движения имеют одинаковый вид с точностью до замены переменных (табл. 2.1).

**Таблица 2.1**. Соответствие между поступательными и вращательными переменными и связь между ними

| | **Поступательное** | **Вращательное** | Связь |
|---|---|---|---|
| Координата | $x$ | φ | $x = R\varphi$ |
| Скорость | $v$ | ω | $v = R\omega$ |
| Ускорение | $a$ | ε | $a_\tau = R\varepsilon$ |

### 2.2.3 Плоское движение твердого тела

Плоское движение – такое движение АТТ, при котором каждая точка тела перемещается в плоскости, и плоскости движения всех точек параллельны. При анализе плоского движения АТТ произвольной форма достаточно рассмотреть движение плоской фигуры (сечения АТТ) в ее плоскости. Примером плоского движения является качение колеса по дороге (рис. 2.10). Центр колеса О движется по прямой, траектории других точек называются циклоидами.

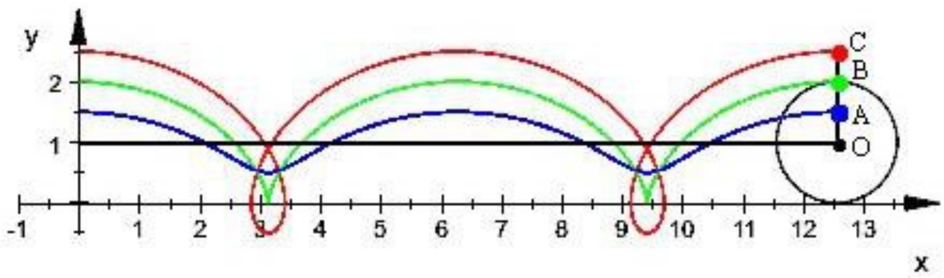



**Рис. 2.10**. Движение точек при качении колеса

Пусть в результате плоского движения сечение твердого тела АВ переходит в положение А′В′ (рис. 2.11, *а*). Такое перемещение можно представить в виде суперпозиции двух движений: поступательного и вращательного вокруг точки В, которая называется полюсом. В качестве полюса можно выбрать любую точку в плоскости движения, даже находящуюся вне тела. На рис. 2.11, *б* в качестве полюса выбрана точка А.

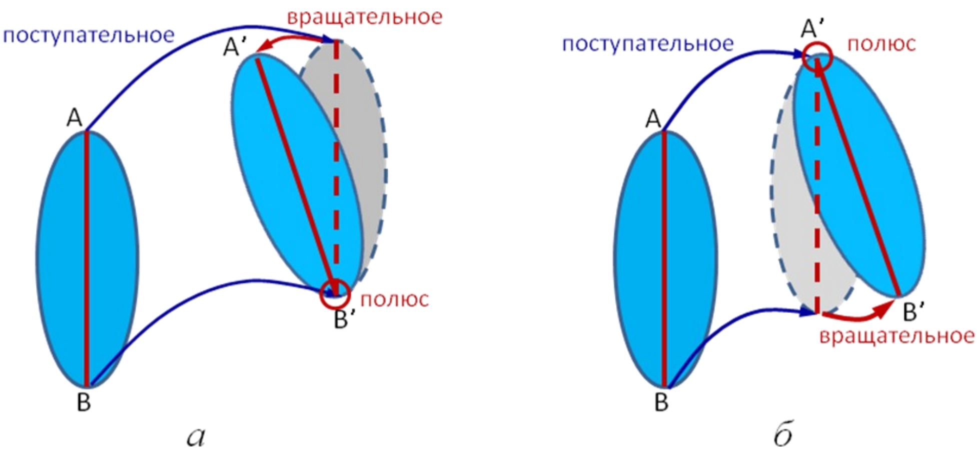



**Рис. 2.11**. Разложение плоского движения на поступательное и вращательное

В зависимости от выбора полюса длина пути при поступательном движении изменяется, но угол поворота остается постоянным.

Рассмотрим элементарное перемещение $d\vec{\mathbf{r}}$ произвольной точки тела (рис. 2.12). Радиус-вектор точки является суммой двух векторов, определяющих положение полюса О и точки относительно полюса: $d\vec{\mathbf{r}} = d\vec{\mathbf{r}}_0 + d\vec{\mathbf{r}}'$, при этом $d\vec{\mathbf{r}}'$ связан с чистым поворотом вокруг О, следовательно, в соответствии с (2.17) $d\vec{\mathbf{r}}' = \; d\vec{\varphi}, \vec{\mathbf{r}}'$ . Переходя от элементарных перемещений к скоростям, получаем:

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_0 + \; \vec{\omega}, \vec{\mathbf{r}}' \; . \qquad (2.25)$$

Скорость поступательного движения зависит от положения полюса, а угловая скорость вращения остается неизменной.

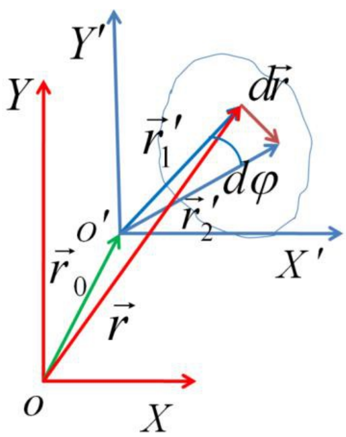



**Рис. 2.12**. К определению скорости точки при плоском движении

Из (2.25) следует, что в любой момент времени в рассматриваемом сечении существует точка, скорость которой равна нулю. Для этой точки $\vec{\mathbf{v}}_0 = - \; \vec{\omega}, \vec{\mathbf{r}}'$ . Такая точка называется **мгновенным центром скоростей** (МЦС). Прямая, перпендикулярная плоскости движения, проходящая через эту точку, называется **мгновенной осью вращения (МОВ)** При плоском движении скорости точек тела в данный момент времени совпадают со скоростями, которые они имели бы при чистом вращении вокруг мгновенной оси. В частном случае колеса, катящегося по дороге без проскальзывания, МОВ проходит через точки, в которых колесо касается дороги, и каждая такая точка является МЦС для точек соответствующей плоскости (рис. 2.13).

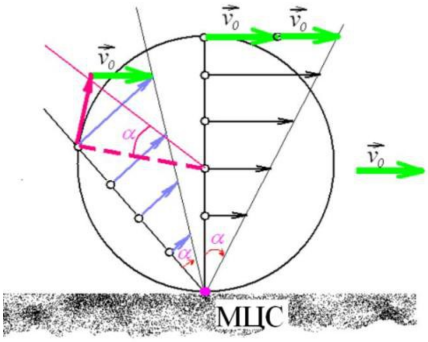



**Рис. 2.13**. Мгновенный центр скоростей при качении колеса

# 3 Динамика

## 3.1 Механика Галилея

Требовалась исключительная сила духа, чтобы извлечь законы природы из конкретных явлений, которые всегда были у всех перед глазами, но объяснение которых тем не менее ускользало от пытливого взгляда философов.

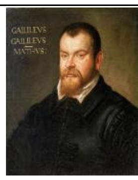
*Ж. Лагранж*

Галилей, пожалуй, больше, чем кто-либо другой из отдельных людей, ответствен за рождение современной науки.

*С. Хокинг*

Если кинематика описывает движение тел, не затрагивая вопроса, почему тело движется так или иначе, то динамика (от греческого δυναμιζ, сила) изучает причины, вызывающие движение тел. Однако, несмотря на греческое происхождение термина, долгие века динамике не уделялось должного внимания. Главенствующее положение занимали освященные церковью принципы, выдвинутые Аристотелем в IV в. до н. э. Еще в VI веке христианский богослов Дж. Филопонус выступил с критикой аристотелевской динамики. Однако понадобилась еще тысяча лет, чтобы добиться революционного прогресса в этой области.

Основы динамики материальной точки были заложены в начале XVII века Г. Галилеем. Галилей подверг тщательной экспериментальной проверке сформулированные Аристотелем физические представления. Сравним основные положения физики Аристотеля и Галилея.

| **Аристотель (IV в. до н. э.)**  | **Галилей (начало XVII в.)**  |
|---|---|
| Скорость падения пропорциональна весу тела. | Ускорение свободного падения не зависит от веса тела. |
| Движение происходит, пока действует «побудительная причина» (сила), и в отсутствие силы прекращается. | При отсутствии внешних сил тело либо покоится, либо равномерно движется (принцип инерции). |

Отметим, что в своих опытах Галилею пришлось преодолеть немалые сложности. Известна легенда о том, что в 1589 году он сбрасывал шары разной массы с вершины Пизанской башни, чтобы продемонстрировать, что время падения не зависит от массы шара. Неизвестно имел ли место такой опыт в действительности, но время падения тела с высоты башни (56 м) чуть больше трех секунд и провести количественные измерения на технике того времени было, конечно, невозможно. Чтобы обойти эту трудность, Галилей запускал шары по наклонной плоскости, увеличивая тем самым время движения. Было замечено, что скорость движения растет прямо пропорционально времени — тела движутся с постоянным ускорением. Был сделан вывод, что ускорение не зависит ни от массы, ни от материала шара.

Теоретические выводы Галилея показывают, как важно в физике правильно составить модель явления, выделить существенные и второстепенные факторы. На рис. 3.1 показано, как меняется скорость падающего тела в зависимости от времени падения. Из-за сопротивления воздуха она через некоторое время становится постоянной (для парашютиста в затяжном прыжке около 50 м/с) и практически пропорциональна весу тела, что близко к закону Аристотеля.

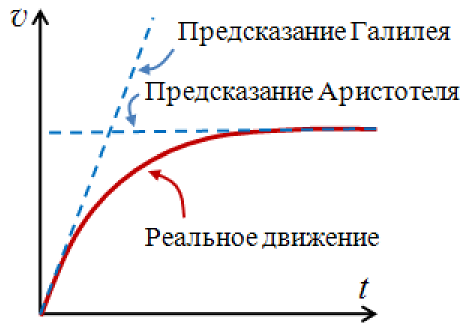



Рис. 3.1. Скорость падающего тела

## 3.2 Законы Ньютона

> Ньютон был счастливейшим из смертных, ибо существует только одна Вселенная, и Ньютон открыл её законы
>
> *Ж. Лагранж*

Основные постулаты и многие ключевые положения классической механики, как теории механического движения, были даны Исааком Ньютоном в его знаменитой книге «Математические начала натуральной философии» (1686 г). В качестве основных постулатов (исходных положений) для построения теории Ньютон сформулировал три закона механики.

### 3.2.1 Первый закон Ньютона

В формулировке Ньютона: «*Каждое тело продолжает сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, пока не* *будет вынуждено изменить это состояние под действием приложенной к нему силы»*.

Этот закон под названием «*принцип инерции*» первым сформулировал Г. Галилей. Причем в формулировке Галилея скорость по умолчанию измерялась в лабораторной системе отсчета (системе отсчета, привязанной к поверхности Земли). Ньютон считал, что этот закон строго выполняется при измерении скорости тела в абсолютной системе отсчета, привязанной к так называемым неподвижным звездам. Система отсчета (СО), в которой выполняется этот закон, получила название *инерциальной* (ИСО).

По первому закону Ньютона любое свободное тело (тело, на которое не действуют силы) в инерциальной системе отсчета покоится или имеет постоянную скорость. В этом случае относительная скорость одного свободного тела относительно другого также не изменяется с течением времени. Таким образом, ***система отсчета, связанная с любым свободным телом, является инерциальной и таких систем бесконечное множество***.

Как показало дальнейшее развитие науки, инерциальные системы имеют два очень важных преимущества по сравнению с другими СО. Во-первых, основные законы природы имеют одинаковый вид во всех инерциальных системах отсчета, во-вторых, этот вид оказывается наиболее простым.

При решении физических задач стараются в качестве рабочей СО выбирать инерциальную СО. Опыт исследования механического движения показывает, что для каждой задачи можно найти СО, которая с достаточной степени инерциальна. Упрощенный вариант формулировки первого закона:

В большом количестве задач, рассматривающих движение тела относительно Земли, можно с приемлемой точностью считать Землю инерциальной системой отсчета. Однако если перейти к движениям планетарного масштаба: полетам ракет, океанским течениям и т. д., это приближение становится неудовлетворительным, поскольку из-за суточного вращения каждая точка поверхности Земли на экваторе в геоцентрической СО движется с центростремительным ускорением 3,4 см/с$^2$. Центр Земли вследствие годового движения в гелиоцентрической СО имеет ускорение 0,6 см/с$^2$. В свою очередь и система отсчета, связанная с Солнцем, не является абсолютно инерциальной, т. к. Солнечная система вращается с ускорением около $3\cdot10^{-8}$ см/с$^2$ вокруг центра Галактики в СО, связанной с удаленными галактиками.

Таким образом, как всегда в физике, применимость модели определяется условиями конкретной задачи.

### 3.2.2 Второй закон Ньютона

В формулировке Ньютона: «*Изменение количества движения* [т. е. импульса, $p = mv$] *пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует*».

В большинстве задач масса тела не меняется, поэтому этот закон можно привести к более привычной форме:

***В инерциальной системе отсчёта ускорение, которое получает материальная точка с постоянной массой, прямо пропорционально равнодействующей всех приложенных к ней сил и обратно пропорционально её массе***.

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}}{m} \tag{3.1}$$

Масса (инертная) характеризует инертность тел, т. е. «сопротивляемость» изменению скорости. В классической механике масса не меняется в результате движения тела и обладает свойством аддитивности: масса системы равна сумме масс слагающих частей: $m = m_1 + m_2 + \ldots$. В квантовой механике и релятивистской физике эти свойства не справедливы.

Во втором законе Ньютона вводится понятие силы, как меры воздействия на данное тело со стороны других тел. Единицей силы в СИ является ньютон (Н) — такая сила, которая сообщает телу массой 1 кг ускорение 1 м/с$^2$.

Математическое равенство, например (3.1), будет выражать закон природы, если левая и правая части равенства могут быть определены независимо. Определение ускорения было дано в кинематике. Массу однородного тела Ньютон определял, как величину, пропорциональную объему тела. В ньютоновской механике постулируется, что масса постоянна и не зависит от скорости движения тела.

Сила, входящая в (3.1) зависит от положения и скорости движения данной материальной точки относительно других тел. В процессе изучения различных типов взаимодействия тел были найдены частные законы для вычисления соответствующих сил (формулы для вычисления сил тяжести, тяготения, упругости, силы Архимеда, силы Кулона, и т. д.).

Опыт показывает, что, *если на тело одновременно действуют несколько сил:* $\vec{\mathbf{F}}_1, \vec{\mathbf{F}}_2, \ldots \vec{\mathbf{F}}_n$*, то ускорение будет таким, как если бы на тело действовала одна сила* $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 + \ldots + \vec{\mathbf{F}}_n$. Это утверждение называется *принципом суперпозиции* сил.

### 3.2.3 Третий закон Ньютона

***Материальные точки взаимодействуют друг с другом силами, имеющими одинаковую природу, направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, равными по модулю и противоположными по направлению***: $\vec{\mathbf{F}}_{12} = -\vec{\mathbf{F}}_{21}$.

Закон утверждает, что силы воздействия тел друг на друга возникают попарно, являясь результатом единого процесса взаимодействия тел.

В третьем законе Ньютона предполагается, что обе силы равны по модулю в любой момент времени независимо от движения тел. Это соответствует ньютоновскому представлению о мгновенном распространению взаимодействий — принципу дальнодействия. В действительности из-за того, что скорость распространения взаимодействия не может быть больше скорости света в вакууме, третий закон Ньютона строго выполняется только в нерелятивистском случае.

## 3.3 Принцип относительности Галилея

В физике важную роль имеет закон преобразования характеристик движения при переходе из одной ИСО в другую. Рассмотрим преобразование координат, скоростей и ускорений при переходе к системе отсчета К′, движущейся поступательно и равномерно со скоростью $V$ относительно исходной системы К. Для удобства будем считать, что оси координат в обеих системах развернуты так, что их направления совпадают, а движение системы К′ происходит вдоль оси X (рис. 3.2). Кроме того будем предполагать, что за начало отсчета времени ($t = t' = 0$) в обеих системах принят момент, когда совпадают точки начала координат (точки О и О′) систем. При этом будем опираться на два постулата классической механики:

- показания однажды синхронизованных часов в обеих системах во всех точках пространства в любой момент времени будут совпадать;
- расстояние между любыми двумя точками, измеренное в каждой из систем будет одним и тем же.

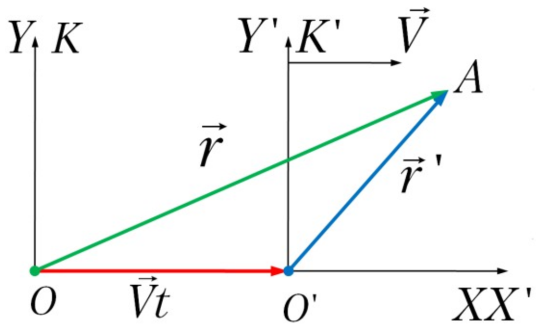



**Рис. 3.2**. Преобразования Галилея

Очевидно, что если положение некоторой точки А в исходной системе задается радиус-вектором $\vec{\mathbf{r}}$, то в движущейся системе

$$\vec{\mathbf{r}}' = \vec{\mathbf{r}} - \vec{V}t \qquad (3.2)$$

Дифференцируя (3.2) по времени, получим соотношение между скоростями и ускорениями в обеих системах. Таким образом:

$$\begin{aligned}
&t' = t;\\
&\vec{\mathbf{r}}' = \vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{V}}t \quad (x' = x - Vt,\ y' = y,\ z' = z);\\
&\vec{\mathbf{v}}' = \vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{V}} \quad (v'_x = v_x - V,\ v'_y = v_y,\ v'_z = v_z);\\
&\vec{\mathbf{a}}' = \vec{\mathbf{a}}.
\end{aligned} \qquad (3.3)$$

Соотношения (3.3) называются преобразованиями Галилея.

Из последней из формул (3.3) видно, что если тело движется без ускорения в системе К, то оно не имеет ускорения и в системе К′. Тем самым мы еще раз убеждаемся, что ***любая система отсчета, движущаяся с постоянной скоростью относительно инерциальной системы отсчета, также является инерциальной***.

Поскольку массы тел в классической (ньютоновской) механике не зависят от скорости движения, то и силы, действующие на тело, будут одинаковы в системах К и К′: $\vec{\mathbf{F}}' = \vec{\mathbf{F}}$. Отсюда приходим к одному из важнейших принципов классической механики — принципу относительности Галилея: ***Законы механики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета***

Это означает, что при одинаковых начальных условиях любое тела будут двигаться в любой ИСО одинаково, т. е. никакими механическими опытами, проводимыми внутри инерциальной системы, нельзя установить, покоится эта система отсчета или движется относительно какой либо другой системы отсчета.

## 3.4 Закон всемирного тяготения

### 3.4.1 Силы тяготения

Я полагаю, теперь доказать тебе будет уместно,
Что никакие тела не имеют возможности сами
Собственной силою вверх подниматься и двигаться кверху

*Тит Лукреций Кар, «О природе вещей», I в. до н. э.*

Догадка о единстве причин, управляющих движением планет и падением земных тел, высказывалась учеными еще задолго до Ньютона. По-видимому, первым ясно высказал эту мысль греческий философ Анаксагор (V в. до н. э.). Он говорил, что Луна, если бы не двигалась, упала бы на Землю. Однако законы тяготения оставались неизвестными еще долгое время. Кеплер, сформулировавший в начале XVII в. законы движения планет, считал, что тяготение обратно пропорционально расстоянию до Солнца и его причиной является вращение Солнца вокруг своей оси. Ближе всех подошел к открытию закона притяжения тел Роберт Гук (1674 г.), однако и он предполагал но не смог доказать правильной зависимости этих сил от расстояния.

Всем известна легенда о том, как И. Ньютон, сидя в саду под яблоней, пришел к мысли о том, что и движение планет, и падение яблок на землю имеют общую причину и подчиняются одному и тому же закону. В своём основном труде «Математические начала натуральной философии» (1686) Ньютон вывел закон тяготения, основываясь на эмпирических законах Кеплера, известных к тому времени. Он показал, что наблюдаемые движения планет свидетельствуют о наличии центральной силы, зависящей только от масс тел и убывающей обратно пропорционально квадрату расстояния.

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{3.4}$$

Коэффициент пропорциональности $G$ называется гравитационной постоянной. В 2014 г. принято значение этой постоянной $G = 6{,}67408 \cdot 10^{-11}$ м$^3$ с$^{-2}$ кг$^{-1}$. Из-за слабости гравитационного взаимодействия значение $G$ измерено с гораздо меньшей точностью, чем другие физические константы.

Сила тяготения направлена вдоль прямой, соединяющей тела и уравнение (3.4) можно записать в векторном виде (рис. 3.3).

$$\vec{\mathbf{F}}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\frac{\vec{\mathbf{r}}_{12}}{r_{12}} \tag{3.5}$$

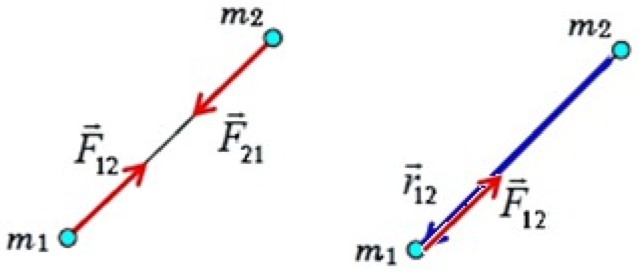



**Рис. 3.3**. Закон всемирного тяготения

Из-за малости гравитационной постоянной силы тяготения становятся заметными только тогда, когда хотя бы одно из взаимодействующих тел имеет очень большую массу (планеты, звезды). Однако в 1798 г. английский физик Г. Кавендиш смог проверить закон тяготения в лабораторных условиях. Установка Кавендиша показана на рис. 3.4.

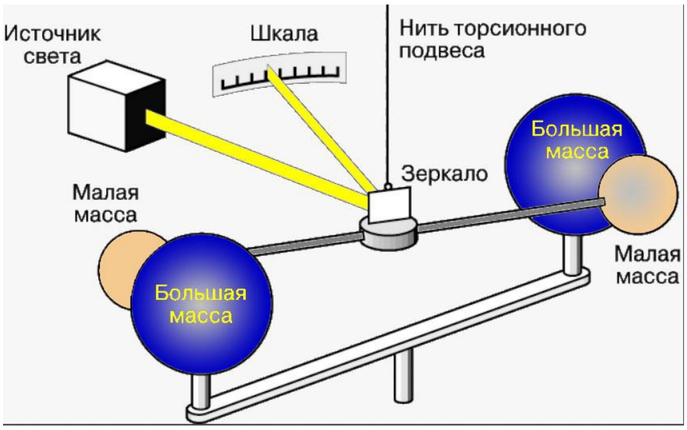



Рис. 3.4. Эксперимент Кавендиша

Основой установки являлись крутильные весы, представляющие собой деревянное коромысло длиной 1,8 м, подвешенное на нити. На концах коромысла укреплялись свинцовые шары m массой 0,73 кг. К этим шарам подводились шары $M$ массой 158 кг. Вследствие гравитационного взаимодействия малых шаров с большими коромысло отклонялось на некоторый угол. Угол отклонения измерялся по перемещению на шкале светового луча, отражающегося от закрепленного на нить зеркала. Кавендишу удалось замерить силу в 50 миллионов раз меньше веса малого шара.

В закон всемирного тяготения входит в качестве параметра масса, которая является мерой гравитационного взаимодействия тел, и поэтому может быть названа гравитационной массой. Возникает вопрос, являются ли гравитационная масса и входящая во второй закон

Ньютона инертная масса в действительности одной и той же величиной. Из опытов Галилея и Ньютона следовало, что гравитационная и инертная массы пропорциональны друг другу с точностью ~0,1%. В 1890 г. Этвеш, изучая отклонение нити с подвешенным на ней грузом от вертикали вследствие вращения Земли, повысил точность до $10^{-8}$. В 2009 г. пропорциональность (условно говоря, «равенство инертной и гравитационной масс») экспериментально проверена с точностью $10^{-13}$.

В классической физике инертные и гравитационные свойства тел никак не связаны, и пропорциональность масс является «случайным совпадением». Только в общей теории относительности Эйнштейна (1915 г.) этот факт был постулирован и положен в основу теоретической модели.

Запись закона всемирного тяготения в форме (3.4) имеет свои ограничения. Она справедлива, если выполняется одно из следующих условий:

- взаимодействующие тела — материальные точки, или
- тела имеют форму шаров, тогда $r$ — расстояние между центрами шаров, или
- одно из тел — шар большого радиуса, взаимодействующий с телом много меньших размеров, тогда $r$ измеряется от центра большого шара.

Формулу (3.4) нельзя, например, использовать для расчета гравитационного взаимодействия длинного стержня и шара.

Обозначим массу Земли $M$, радиус Земли $R$. В случае если малое тело массой $m$ находится вблизи поверхности Земли, т. е. на расстоянии от её центра, равном радиусу Земли, из (3.4) можно получить выражение для ускорения свободного падения:

$$\frac{GMm}{R^2} = mg, \tag{3.6}$$

следовательно

$$g = \frac{GM}{R^2}. \tag{3.7}$$

Из-за того, что эта формула не учитывает неинерциальность системы отсчета, связанной с земной поверхностью, и отклонение формы Земли от сферической она справедлива с точностью до сотых м/с$^2$.

### 3.4.2 Движение спутников

Рассмотрим движение спутника на высоте $h$ по круговой орбите вокруг Земли (рис. 3.5). В этом случае сила тяготения играет роль центростремительной силы, и уравнение движения выглядит как

$$\frac{GM}{(R+h)^2} = g\frac{R^2}{(R+h)^2} = \frac{v^2}{R+h} \qquad (3.8)$$

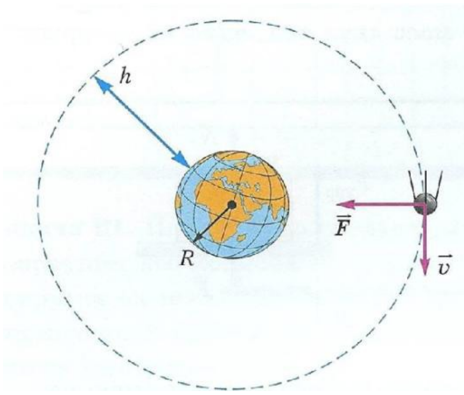



**Рис. 3.5**. Орбитальное движение

Если спутник низколетящий, т. е. $h << R$, то скорость его движения в соответствии с (3.8) должна быть

$$v_{\mathrm{I}} = \sqrt{gR}\,. \qquad (3.9)$$

Определяемая уравнением (3.9) скорость называется первой космической скоростью, для Земли она равна 7,9 км/с.

Период обращения спутника, очевидно, равен

$$T = \frac{2\pi(R+h)}{v} = \frac{2\pi(R+h)^{3/2}}{R\sqrt{g}} \qquad (3.10)$$

Таким образом, с ростом высоты орбиты скорость движения спутника уменьшается, а период увеличивается. При высоте 35 786 км период становится равен периоду вращения Земли относительно звезд (23 часа 56 минут 4 секунды). Орбита, проходящая на такой высоте, называется геосинхронной. Если при этом плоскость орбиты лежит в плоскости земного экватора, то орбита называется геостационарной. При движении по такой орбите спутник все время находится над одной и той же точкой поверхности Земли.

Среднее расстояние между центрами Земли и Луны равно 384 467 км (около 30 земных диаметров), из формул (3.8) и (3.10) получаем, что средняя скорость движения Луны по орбите 1,02 км/с, а период обращения 27 д 7 ч 43 мин 11,5 сек.

### 3.4.3 Сила тяжести и вес

На Земле на любое тело действует сила тяжести, равная $mg$. Когда тело покоится относительно Земли, эта сила уравновешивается силой реакции $N$ опоры или подвеса, удерживающих тело от падения (рис. 3.6). Весом тела называется сила $P$, с которой тело действует на опору (или подвес). По третьему закону Ньютона

$$|P| = |N|.$$

С другой стороны по второму закону Ньютона

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}.$$

Таким образом, $P = mg$, вес равен силе тяжести, только если ускорение тела относительно поверхности Земли $a = 0$.

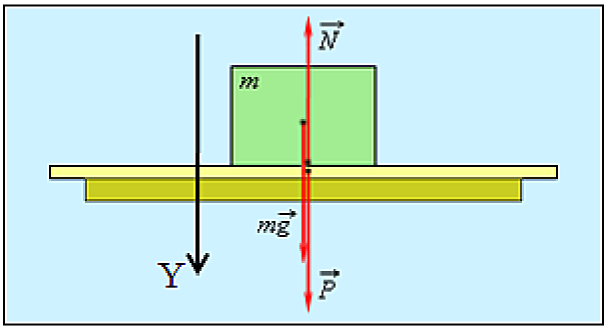



**Рис. 3.6**. Вес и сила тяжести

Если же ускорение имеется, то вес тела будет равен (в проекциях на направление силы тяжести)

$$P = m\;g - a_y \qquad (3.11)$$

При ускорении, направленном вверх ($a_y < 0$), вес будет больше, чем сила тяжести, например, в стартующей ракете космонавт испытывает перегрузку[1]. Если же ускорение направлено вниз ($a_y > 0$), то вес меньше силы тяжести, а при $a_y = g$ вес вообще исчезает и наступает состояние невесомости.

Поскольку силы и ускорения — величины векторные, понятно, что вес тела будет изменяться и при наличии невертикального ускорения. Так при взлете пассажирского самолета горизонтальное ускорение составляет около 3 м/с$^2$, при этом пассажиры испытывают перегрузку 1,04 $g$.

[1] Перегрузка — отношение веса тела к весу неподвижного тела на поверхности Земли. Перегрузка является безразмерной величиной, однако обычно указывается в единицах ускорения свободного падения $g$. Перегрузка в $2g$ означает, что вес превышает силу тяжести вдвое.

## 3.5 Законы Кеплера

> Сегодня, когда этот научный акт уже совершился, никто не может оценить полностью, сколько изобретательности, сколько тяжёлого труда и терпения понадобилось, чтобы открыть эти законы и столь точно их выразить.
>
> *А. Эйнштейн.*

### 3.5.1 Как устроена Солнечная система?

С древнейших времен господствовала геоцентрическая система мира: Земля считалась центром вселенной, а Солнце и планеты вращались вокруг нее. Однако видимое движение небесных светил происходило весьма сложным образом. Теорию такого движения предложил выдающийся математик античного мира Клавдий Птолемей во II в. н. э. В своем тринадцатитомном сочинении «Альмагест» («Великое») он сумел представить неравномерные движения небесных светил в виде комбинации нескольких равномерных движений по окружностям (рис. 3.7). В модели Птолемея планета равномерно движется по малому кругу, называемому эпициклом, центр которого, в свою очередь, движется по большому кругу, который называется деферентом.

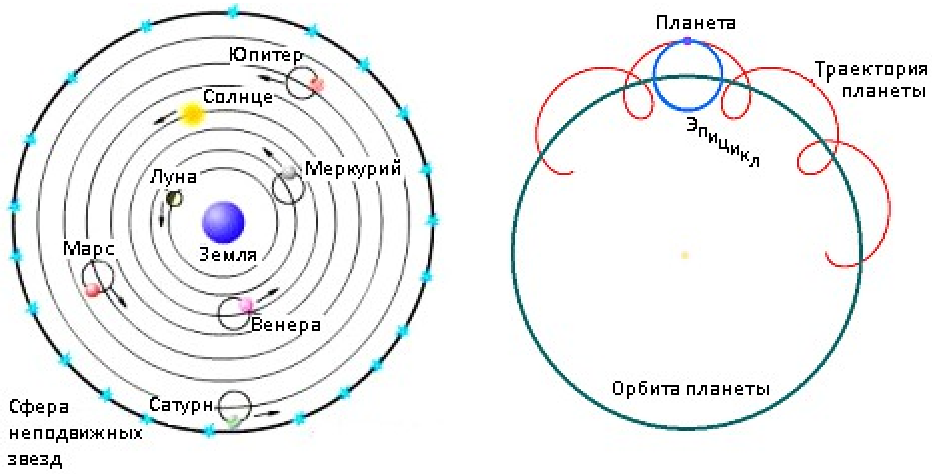



**Рис. 3.7**. Система мира Птолемея

Эпициклы позволяли объяснить попятные движения внешних планет, однако не до конца описывали неравномерность движения планет, что привело к дальнейшему усложнению модели, введению вторичных эпициклов и т. д. Тем не менее, более тысячи лет в западном и арабском мире модель Птолемея была общепринятой. Даже Колумб пользовался составленными по ней астрономическими таблицами.

В 1500-е годы польский астроном Николай Коперник (1473–1543) разрабатывает гелиоцентрическую систему мира, в соответствии с которой не Земля, а Солнце должно быть неподвижным центром Вселенной. Коперник весьма просто объяснил всю кажущуюся запутанность движений планет, но, считая их пути окружностями, он был вынужден сохранить эпициклы и деференты древних для объяснения неравномерности движений.

В 1600 г. в Праге встретились два великих астронома: Тихо Браге (1546–1601) и Иоганн Кеплер (1571–1630). Тихо Браге за много лет составил объёмный труд по наблюдению планет и сотен звёзд, причём точность его измерений была существенно выше, чем у всех предшественников. На протяжении нескольких лет Кеплер внимательно изучал данные Браге и в результате тщательного анализа пришёл к выводу, что траектория движения Марса представляет собой не круг, а эллипс. Три закона Кеплера были сформулированы в 1609 г. в книге «Новая астрономия». Следует отметить, что законы Кеплера получены из анализа экспериментальных данных, т. е. являются эмпирическими. Их теоретическое обоснование было дано Ньютоном.

### 3.5.2 Первый закон Кеплера

В рамках классической ньютоновской механики можно найти точное решение так называемой задачи двух тел: двух материальных точек, между которыми действуют центральные силы, убывающие обратно пропорционально квадрату расстояния. Можно показать, что в этом случае оба тела движутся по эллиптическим орбитам вокруг общего центра масс. Если одно из тел имеет массу пренебрежимо малую по сравнению со вторым (планета или комета по сравнению с Солнцем), то ***планета*** (более легкое тело) ***вращается по эллипсу вокруг Солнца, причем Солнце находится в фокусе эллипса*** (рис. 3.8). В этом и состоит первый закон Кеплера.

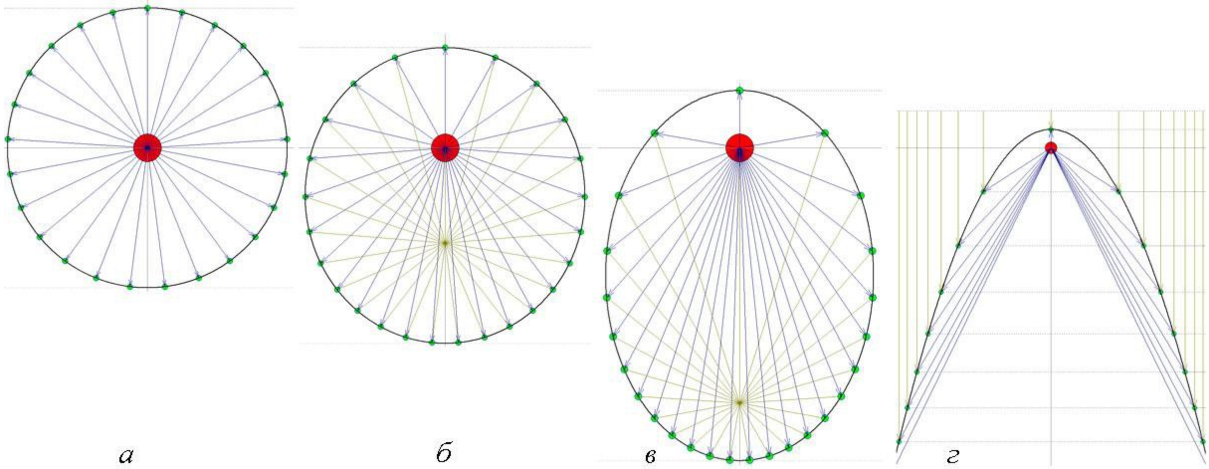



**Рис. 3.8**. Кеплеровские орбиты: круговая (*а*), эллиптические (*б*, *в*), параболическая (*г*)

Форма эллипса зависит от скорости планеты. Так в частном случае, когда скорость удовлетворяет уравнению (3.8), эллипс превращается в окружность (рис. 3.8, *а*). По мере роста скорости эллипс становится все более вытянутым (рис. 3.8, *б*, *в*). Наконец при достижении так называемой второй космической скорости, которая в $\sqrt{2}$ раз больше первой космической (3.9), эллипс размыкается, превращаясь в параболу и комета (или ракета) уходит от центра тяготения (рис. 3.8, *г*).

Форма эллипса определяется его эксцентриситетом $e$, который равен отношению расстояния от фокуса до центра к длине большой полуоси. Для окружности $e = 0$, для эллипсов $0 < e < 1$, для параболы $e = 1$. Среди планет солнечной системы Венера и Земля движутся почти по круговым орбитам ($e$ = 0,007 и 0,017) соответственно. У Марса орбита значительно более вытянута ($e$ = 0,094). А вот у кометы Галлея $e$ = 0,967, ближайшая к Солнцу точка ее орбиты, *перигелий*, находится на расстоянии 0,6 а.е.[1], а самая дальняя точка, *афелий*, на расстоянии 35 а.е.

### 3.5.3 Второй закон Кеплера

Одной из важнейших характеристик вращательного движения является момент импульса (угловой момент, момент количества движения). Он определяется как (рис. 3.9)

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{r}} \times m\vec{\mathbf{v}}. \qquad (3.12)$$

[1] А.е. — астрономическая единица, равна большой полуоси земной орбиты, около 150 млн. км.

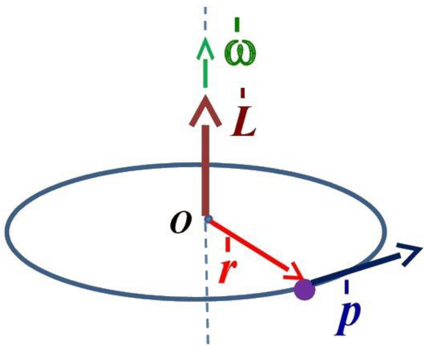



**Рис. 3.9**. Момент импульса материальной точки

Продифференцируем равенство (3.12) по времени:

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \times m\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{r}} \times m\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}. \quad (3.13)$$

Первое слагаемое в правой части (3.13), очевидно, равно нулю, т. к. производная от радиус-вектора есть скорость, и получается векторное произведение коллинеарных векторов. Второе слагаемое может быть записано как

$$\vec{\mathbf{r}} \times m\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}.$$

В поле центральных сил тяготения вектора $\vec{\mathbf{F}}$ и $\vec{\mathbf{r}}$ антипараллельны, следовательно, это слагаемое тоже равно нулю. Таким образом, мы получаем, что в поле центральных сил выполняется *закон сохранения момента импульса*[1]

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = 0, \quad \vec{\mathbf{L}} = \mathrm{const} \quad (3.14)$$

При движении планеты по орбите радиус-вектор за время $dt$ «закрашивает» площадь (рис. 3.10, *а*)

$$dS = \frac{1}{2} r \sin\theta\, v dt = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \vec{v}\right| dt = \frac{\left|\vec{L}\right|}{2m} dt. \quad (3.15)$$

Поскольку $\vec{L} = \mathrm{const}$, то секториальная (или секторная) скорость $\dfrac{dS}{dt}$ тоже постоянна. Отсюда следует второй закон Кеплера: ***Радиус-вектор планеты за равные времена описывает равные площади*** (рис. 3.10, *б*).

[1] Здесь рассмотрен частный случай закона сохранения момента импульса, более подробно этот вопрос обсуждается в разделе, посвященном вращательной динамике.

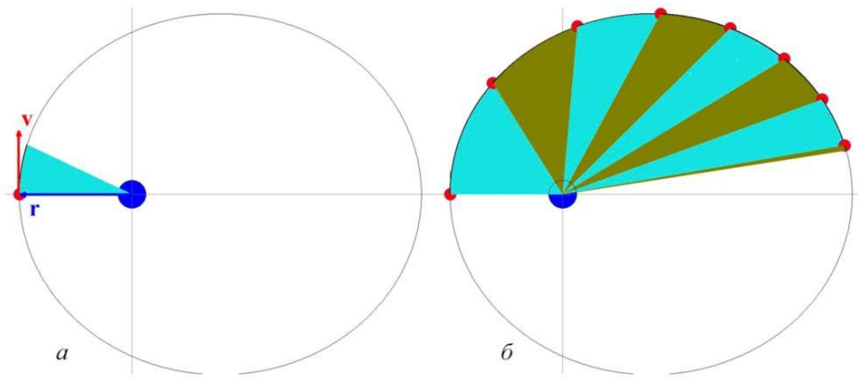



**Рис. 3.10**. Секториальная скорость (*а*), второй закон Кеплера (*б*)

Таким образом, из второго закона Кеплера следует, что планета движется вокруг Солнца неравномерно, имея в перигелии (ближайшей к Солнцу точке орбиты, Земля проходит перигелий в начале января) б***о***льшую линейную скорость, чем в афелии (наиболее удалённой точке орбиты, Земля проходит афелий в начале июля).

### 3.5.4 Третий закон Кеплера

Рассмотрим планету, движущуюся по круговой орбите радиуса $R$. Как было показано раньше, период обращения спутника Земли можно рассчитать по формуле (3.10). Применительно к движению планеты эту формулу можно записать в виде

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} R^{3/2}, \qquad (3.16)$$

где $M$ — масса Солнца.

В случае эллиптического движения вместо радиуса орбиты в (3.16) следует подставлять величину большой полуоси эллипса (рис. 3.11).

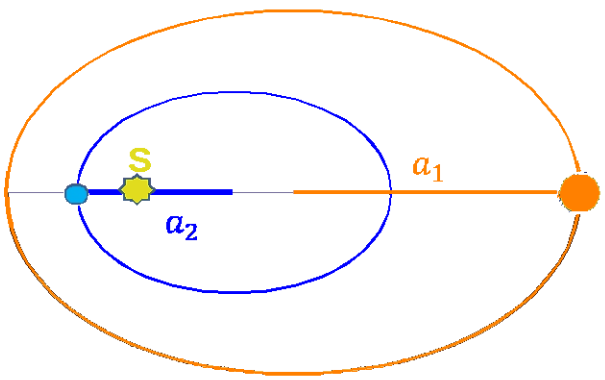



**Рис. 3.11**. Третий закон Кеплера

Третий закон Кеплера: ***квадраты периодов обращения планет***

***вокруг Солнца относятся, как кубы больших полуосей орбит планет***.

В действительности планета и Солнце движутся по эллипсам вокруг их общего центра масс. Более точную формулировку третьего закона можно записать как

$$\frac{T_1^2 \quad M + m_1}{T_2^2 \quad M + m_2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}, \tag{3.17}$$

где $M$ — масса Солнца, а $m_1$ и $m_2$— массы планет.

Поскольку движение и масса оказались связаны, эту комбинацию закона Кеплера и закона тяготения Ньютона используют для определения массы планет и спутников, если известны их орбиты и орбитальные периоды.

# 4 Импульс материальной точки и системы материальных точек. Динамика системы материальных точек

## 4.1 Второй закон Ньютона в импульсной форме для МТ. Импульс силы.

В классической нерелятивистской динамике импульс материальной точки определяется как произведение её массы на её скорость:

$$\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}. \tag{4.1}$$

Единица измерения импульса *кг·м/с* или *Н·с*. Для тела с постоянной массой производная импульса по времени выражается через ускорение:

$$\frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = m\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = m\vec{\mathbf{a}}, \tag{4.2}$$

Отсюда, учитывая соотношение (3.1), получаем формулировку второго закона Ньютона в следующем виде

$$\frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i, \tag{4.3}$$

т.е. *производная от импульса МТ по времени равна равнодействующей всех сил, действующих на эту МТ.* В действительности, как показывает опыт, форма закон (4.3) является более общей, чем (3.1). При движении со скоростями близкими к скорости света в вакууме (см. вторую часть настоящего пособия) изменяется определение импульса, и формула (4.1) перестает выполняться, а формулировка (4.3) основного закона динамики МТ сохраняет свой вид.

С помощью уравнения (4.3) найдем приращение импульса МТ $\Delta\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}_2 - \vec{\mathbf{p}}_1$ за промежуток времени от момента $t_1$ до момента $t_2$:

$$\Delta\vec{\mathbf{p}} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathbf{F}} dt, \tag{4.4}$$

где вектор $\vec{\mathbf{F}}$ обозначает равнодействующую всех сил: $\vec{\mathbf{F}} = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i$. Возникший в уравнении(4.4) интеграл от вектора силы по времени называется импульсом силы на промежутке времени от $t_1$ до $t_2$. Уравнение (4.4) означает, что *для любого промежутка времени приращение импульса МТ равно импульсу результирующей силы, действующей на эту*

*МТ*. Это утверждение называют импульсной формулировкой второго закона Ньютона.

В том случае, когда сила на промежутке времени от $t_1$ до $t_2$ не изменяется по модулю и направлению (постоянная сила), *импульс силы равен произведению вектора силы на время ее действия*, и уравнение (4.4) можно записать в виде

$$\Delta\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{F}}\,(t_2 - t_1)\,. \tag{4.5}$$

Пример применения формулы (4.5) представлен на рисунке 4.1. Тело массой $m$ , брошенное под углом к горизонту изменяет свой импульс под действием силы тяжести $m\vec{\mathbf{g}}$. При этом за время $t$ от начала движения изменение импульса

$$\vec{\mathbf{p}} - \vec{\mathbf{p}}_0 = m\vec{\mathbf{g}}t\,. \tag{4.6}$$

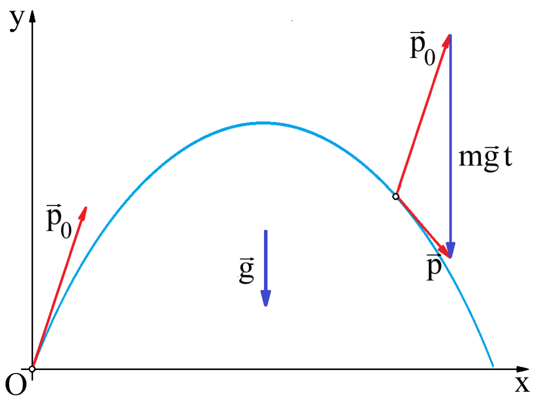



**Рис. 4.1**. Изменение импульса тела

## 4.2 Основное уравнение динамики системы МТ.

Введем импульс системы материальных точек как векторную сумму импульсов всех точек:

$$\vec{\mathbf{P}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{p}}_i\,, \tag{4.7}$$

где $N$ — общее количество материальных точек, составляющих систему.

Рассмотрим на примере системы из двух материальных точек, чем определяется «скорость» изменения полного импульса $\dfrac{d\vec{\mathbf{P}}}{dt}$. Очевидно, изменение полного импульса складывается из суммы изменений импульсов $\vec{\mathbf{p}}_1$ и $\vec{\mathbf{p}}_2$ первого и второго тел:

$$\frac{d\vec{\mathbf{P}}}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}_1}{dt} + \frac{d\vec{\mathbf{p}}_2}{dt}. \quad (4.8)$$

Каждое из тел системы взаимодействует друг с другом и с внешними телами, и «скорость» изменения импульса каждого из тел, в соответствии со вторым законом Ньютона (4.3), выражается через сумму сил:

$$\frac{d\vec{\mathbf{p}}_1}{dt} = \vec{\mathbf{F}}_{12} + \vec{\mathbf{F}}_1^{(\text{ex})}; \quad \frac{d\vec{\mathbf{p}}_2}{dt} = \vec{\mathbf{F}}_{21} + \vec{\mathbf{F}}_2^{(\text{ex})}. \quad (4.9)$$

Здесь $\vec{\mathbf{F}}_{12}$ и $\vec{\mathbf{F}}_{21}$ — сила, действующая на первое тело со стороны второго и, — на второе со стороны первого, соответственно, а $\vec{\mathbf{F}}_1^{(\text{ex})}$ и $\vec{\mathbf{F}}_2^{(\text{ex})}$ — результирующие внешних сил, действующие на первое и второе тело со стороны внешних тел.

Подставим выражения (4.9) в уравнение (4.8) и учтем, что по третьему закону Ньютона $\vec{\mathbf{F}}_{12} = -\vec{\mathbf{F}}_{21}$. В итоге получим

$$\frac{d\vec{\mathbf{P}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}}_1^{(\text{ex})} + \vec{\mathbf{F}}_2^{(\text{ex})}. \quad (4.10)$$

Если в системе число тел больше двух, то при сложении всех сил, действующих на тела системы, внутренние силы будут входить парами $\vec{\mathbf{F}}_{ij}$ и $\vec{\mathbf{F}}_{ji}$ ($i$ и $j$ — номера тел), и при сложении каждая такая пара сил будет давать ноль по третьему закону Ньютона. Поэтому для системы из произвольного числа материальных точек выполняется соотношение

$$\frac{d\vec{\mathbf{P}}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}_i^{(\text{ex})}, \quad (4.11)$$

т. е. ***скорость изменения полного импульса системы равна результирующей внешних сил***. Это утверждение называется *основным законом динамики системы материальных точек*.

## 4.3 Замкнутая механической система. Закон сохранения импульса.

Система тел называется замкнутой, если взаимодействием тел системы с внешними телами можно пренебречь или более строго, если выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}_i^{(\text{ex})} = 0 \quad (4.12)$$

В этом случае из закона (4.11) следует, что импульс системы не изменяется с течением времени, т. е. выполняется *закон сохранения импульса*:

$$\vec{\mathbf{P}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{p}}_i = \text{const}. \tag{4.13}$$

Этот закон позволяет делать некоторые предсказания относительно поведения материальных точек составляющих систему, даже не зная характера сил взаимодействия между ними.

Рассмотрим столкновение движущейся частицы 1 и покоящейся частицей 2 (рис. 4.2). Пусть измерены импульс $\vec{\mathbf{p}}_{10}$ первой частицы до столкновения и импульс $\vec{\mathbf{p}}_1$ этой же частицы после столкновения. Учитывая, что импульс второй частицы до столкновения $\vec{\mathbf{p}}_{20} = 0$, закон сохранения импульса (4.13) позволяет предсказать, каким будет импульс второй частицы после столкновения:

$$\vec{\mathbf{p}}_2 = \vec{\mathbf{p}}_{10} - \vec{\mathbf{p}}_1, \tag{4.14}$$

т. е. импульс первоначально покоившейся второй частицы после столкновения равен убыли импульса первой частицы.

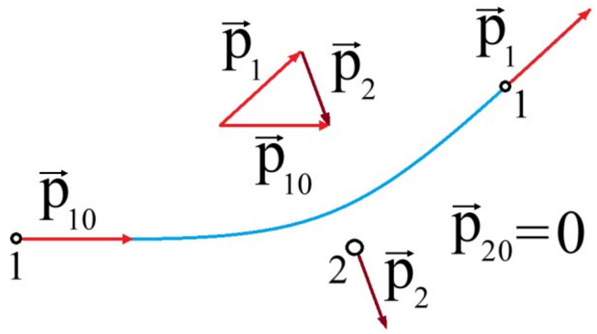



**Рис. 4.2**. Закон сохранения импульса при столкновении двух частиц

## 4.4 Определение массы на основе закона сохранения импульса.

Рассмотрим столкновение двух тел с массами $m_1$ и $m_2$, образующих замкнутую систему. Пусть $\vec{\mathbf{v}}_1$, $\vec{\mathbf{v}}_2$ — скорости тел до столкновения, $\vec{\mathbf{v}}'_1$, $\vec{\mathbf{v}}'_2$ — скорости тел после столкновения. Из закона сохранения импульса (4.13) следует:

$$m_1\vec{\mathbf{v}}_1 + m_2\vec{\mathbf{v}}_2 = m_1\vec{\mathbf{v}}'_1 + m_2\vec{\mathbf{v}}'_2. \tag{4.15}$$

Преобразуем это уравнение к виду

$$m_2\Delta\vec{\mathbf{v}}_2 = -m_1\Delta\vec{\mathbf{v}}_1, \tag{4.16}$$

где $\Delta\vec{\mathbf{v}}_1 = \vec{\mathbf{v}}_1' - \vec{\mathbf{v}}_1$ и $\Delta\vec{\mathbf{v}}_2 = \vec{\mathbf{v}}_2' - \vec{\mathbf{v}}_2$. Как видно из уравнения (4.16) изменения скоростей тел при столкновении коллинеарны и направлены в противоположные стороны. При этом отношение масс тел и отношение модулей изменения их скоростей связаны соотношением

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{|\Delta\vec{\mathbf{v}}_1|}{|\Delta\vec{\mathbf{v}}_2|}. \tag{4.17}$$

Отношение модулей векторов в правой части равенство можно измерить экспериментально, определив тем самым отношение масс.

Пусть в качестве первого тела в столкновении участвует тело эталонной массы $m_0$, а второго — тело неизвестной массы $m$. Из уравнения (4.17) находим

$$m = \frac{|\Delta\vec{\mathbf{v}}_0|}{|\Delta\vec{\mathbf{v}}|} m_0, \tag{4.18}$$

где $|\Delta\vec{\mathbf{v}}_0|$ — модуль изменения скорости эталонного тела при столкновении, $|\Delta\vec{\mathbf{v}}|$ — модуль изменения скорости тела с неизвестной массой. Хотя массу обычно определяют из других соотношений, принципиальная важность соотношения (4.18) в том, что оно позволяет измерить массу любого тела только с помощью измерения скорости.

## 4.5 Центр масс системы МТ.

Рассмотрим систему МТ с массами $m_1$, $m_2$,..., $m_N$. Пусть $\vec{\mathbf{r}}_1$, $\vec{\mathbf{r}}_2$,..., $\vec{\mathbf{r}}_N$ — радиус-векторы этих МТ. Определим центр масс системы, как точку, чей радиус-вектор равен взвешенной сумме радиус-векторов отдельных МТ, причем в качестве веса[1] возьмем отношение массы данной МТ к полной массе системы:

$$\vec{\mathbf{r}}_c = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{m} \vec{\mathbf{r}}_i = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\mathbf{r}}_i. \tag{4.19}$$

Здесь $m = \sum_{i=1}^{N} m_i$ — полная масса системы. Как станет понятно из дальнейшего, центр масс играет важную роль при описании системы МТ.

Легко показать, что относительный радиус-вектор $\vec{\mathbf{r}}_{ci} = \vec{\mathbf{r}}_c - \vec{\mathbf{r}}_i$ центра масс по отношению к каждой из точек системы не изменяется при изменении положения начала отсчета системы координат.

[1] Термин «вес» здесь употребляется в математическом смысле, не путать с физическим весом тела.

Для системы из двух материальных точек (рис. 4.3) центр масс расположен на отрезке, соединяющем точки, и делит этот отрезок в отношении обратном отношению масс:

$$\frac{|\vec{\mathbf{r}}_{c1}|}{|\vec{\mathbf{r}}_{c2}|} = \frac{m_2}{m_1}. \tag{4.20}$$

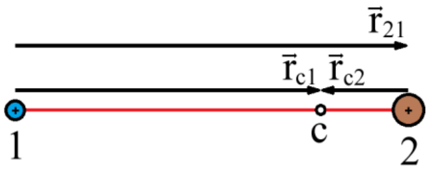



**Рис. 4.3**. К определению положения центра масс системы из двух материальных точек

Для того чтобы это установить, выберем начало координат в первой МТ. При таком выборе $\vec{\mathbf{r}}_1 = 0$, $\vec{\mathbf{r}}_2 = \vec{\mathbf{r}}_{21}$ и радиус-вектор центра масс из уравнения (4.19) равен

$$\vec{\mathbf{r}}_{c1} = \frac{m_2 \vec{\mathbf{r}}_{21}}{m_1 + m_2}. \tag{4.21}$$

Аналогично, если начало координат выбрать во второй МТ, получим

$$\vec{\mathbf{r}}_{c2} = \frac{m_1 \vec{\mathbf{r}}_{12}}{m_1 + m_2} = -\frac{m_1 \vec{\mathbf{r}}_{21}}{m_1 + m_2}. \tag{4.22}$$

Из соотношений (4.21) и (4.22) следует формула (4.20).

В случае сплошного тела в качестве материальных точек рассматриваются элементарные объемы $dV$ (рис. 4.4).

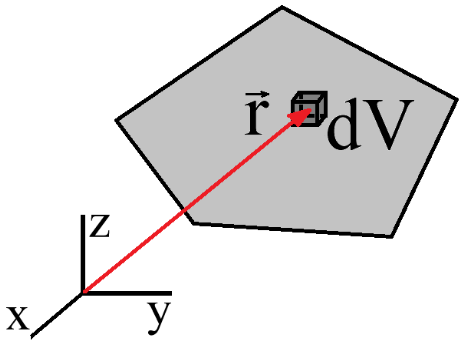



**Рис. 4.4**. К определению положения центра масс сплошного тела

Пусть $\rho\ \vec{\mathbf{r}}$ — плотность материала в окрестности точки с радиус-вектором $\vec{\mathbf{r}}$, тогда элементарная масса $dm = \rho\ \vec{\mathbf{r}}\ dV$ и формула (4.19) трансформируется в соотношение

$$\vec{\mathbf{r}}_c = \frac{\int\limits_V \vec{\mathbf{r}}\rho\left(\vec{\mathbf{r}}\right)dV}{\int\limits_V \rho\left(\vec{\mathbf{r}}\right)dV}\,, \tag{4.23}$$

где интегрирование проводится по всему объему $V$ тела

Можно доказать, что для тела с симметричным распределением массы центр масс находится в центре симметрии тела. Например, для однородного тонкого стержня центр масс находится в его середине, для однородного шара — в его центре.

## 4.6 Скорость центра масс системы МТ.

Найдем скорость, с которой движется центр масс:

$$\vec{\mathbf{v}}_c = \frac{d\vec{\mathbf{r}}_c}{dt} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{\mathbf{r}}_i}{dt}}{m} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \vec{\mathbf{v}}_i}{m} = \frac{\vec{\mathbf{P}}}{m}\,. \tag{4.24}$$

Как видим, скорость центра масс определяется полным импульсом $\vec{\mathbf{P}}$ системы.

Соотношение (4.24) в виде

$$\vec{\mathbf{P}} = m\vec{\mathbf{v}}_c \tag{4.25}$$

позволяет находить полный импульс системы через скорость центра масс.

Формула (4.25) справедлива не только для дискретной системы МТ, но и в случае сплошного тела. Она существенно облегчает нахождение полного импульса системы. Рассмотрим, например, однородный длинный стержень массы $m$ длиной $l$, подвешенный за один из его концов на горизонтальной оси (рис. 4.5, *а*) (красные стрелки изображают скорости соответствующих точек).

Пусть стержень поворачивается с угловой скорость $\omega$. Разные части стержня имеют разную линейную скорость. Но, поскольку в этот момент центр масс имеет линейную скорость $v_c = \frac{1}{2}\omega l$, в соответствии с формулой (4.25) модуль полного импульса всего стержня $P = \frac{1}{2}m\omega l$. Аналогично, для колеса автомобиля, который движется со скоростью $v_0$ (рис. 4.5, *б*), $v_c = v_0$, и $P = mv_0$.

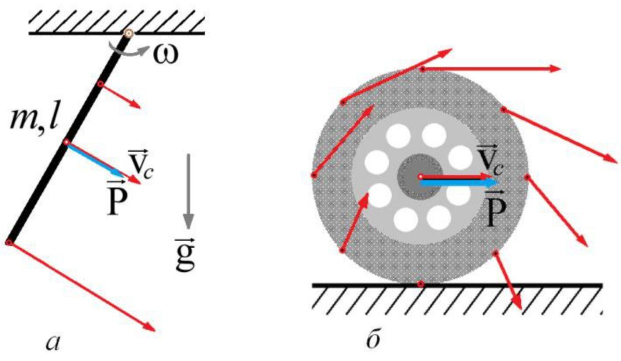



**Рис. 4.5**. Определение полного импульса сплошного тела через движение центра масс, *а* — качающийся стержень, *б* – катящееся колесо

Заметим, что в случае замкнутой системы материальных точек выполняется закон сохранения импульса (4.13), и скорость центра масс такой системы в соответствии с уравнением (4.24) остается постоянной по модулю и по направлению.

## 4.7 Ускорение центра масс системы МТ. Основной закон динамики системы МТ.

Из уравнения (4.24) следует, что ускорение центра масс системы связано с производной полного импульса системы:

$$\vec{\mathbf{a}}_c = \frac{d\vec{\mathbf{v}}_c}{dt} = \frac{1}{m}\frac{d\vec{\mathbf{P}}}{dt}. \tag{4.26}$$

Выражая эту производную из основного закона динамики системы (4.11), находим

$$m\vec{\mathbf{a}}_c = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}_i^{(\mathrm{ex})}. \tag{4.27}$$

Это уравнение по форме совпадает с уравнением второго закона Ньютона (3.1) для одной материальной точки, что позволяет сформулировать следующее утверждение. *Центр масс системы движется при заданных начальных условиях так, как двигалась бы при таких же начальных условиях одна материальная точка с массой m системы под действием результирующей внешних сил.* Под начальными условиями подразумеваются начальный радиус-вектор и начальная скорость центра масс.

В качестве примера применения уравнения (4.27) рассмотрим движение центра масс человека прыгающего в воду (рис 4.6, *а*). Если пренебречь силой сопротивления воздуха, то внешняя сила для каждой частицы в теле прыгуна — это сила тяжести, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}_i^{(\mathrm{ex})} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\mathbf{g}} = m\vec{\mathbf{g}}, \qquad (4.28)$$

где суммирование проводится по всем массам $m_i$, составляющим тело ($m$ — общая масса тела прыгуна). Подставляя выражение (4.28) в уравнение (4.27), получаем $\vec{\mathbf{a}}_c = \vec{\mathbf{g}}$. Это означает, что при заданных начальных радиус-векторе $\vec{\mathbf{r}}_0$ и скорости центра масс $\vec{\mathbf{v}}_{c0}$, радиус-вектор центра масс зависит от времени $t$ по формуле $\vec{\mathbf{r}}\ t\ = \vec{\mathbf{r}}_0 + \vec{\mathbf{v}}_{c0}t + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{g}}t^2$. Точно также изменялся бы с течением времени радиус-вектор камня (рис 4.6, *б*), брошенного из той же точки $\vec{\mathbf{r}}_0$ со скоростью $\vec{\mathbf{v}}_0 = \vec{\mathbf{v}}_{c0}$.

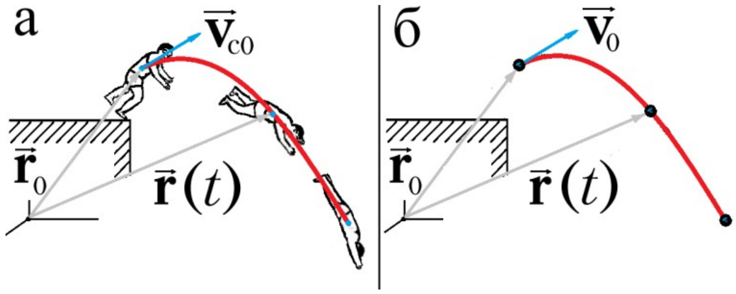



**Рис. 4.6**. При одинаковой начальной скорости центра масс прыгуна (*а*) и брошенного камня (*б*) центр масс прыгуна и камень движутся по одинаковым траекториям.

# 5 Неинерциальные системы отсчета. Силы инерции

Предполагается что все движения, о которых идет речь ниже, происходят со скоростями значительно меньшими, чем скорость света в вакууме (классическая или нерелятивистская физика). Как показывает эксперимент, в этом случае длительность любого процесса измеренная в некоторой СО не зависит от того движется или покоится СО относительно физической системы, в которой происходит процесс. Кроме того расстояние между любыми двумя точками и угол между любыми двумя направлениями, также не зависят от того движется или покоится СО относительно физических объектов, задающих эти точки и направления.

## 5.1 Переход к поступательно движущейся системе отсчета

Пусть в некоторый момент времени начало отсчета $O'$ СО $K'$ в СО $K$ имеет радиус-вектор $\vec{\mathbf{r}}_0$. Пусть тело находится в точке $M$, имеющей в $K'$ радиус-вектор $\vec{\mathbf{r}}'$. Поскольку с точки зрения СО $K$ этот вектор имеют такой же модуль и направление, по обычным правилам сложения векторов в СО $K$ получаем (рис. 5.1)

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_0 + \vec{\mathbf{r}}' \tag{5.1}$$

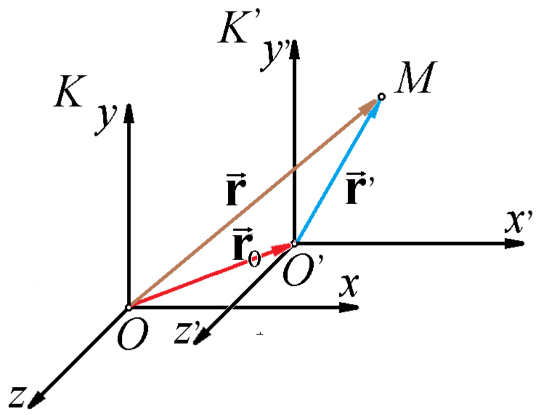



**Рис. 5.1**. Определение радиус-вектора $\vec{\mathbf{r}}$ точки $M$ в СО $K$ по известным радиус-вектору $\vec{\mathbf{r}}_0$ начала отсчета $O'$ СО $K$ в и радиус-вектору точки $M$ в СО $K'$

Пусть система отсчета $K'$ движется поступательно относительно системы отсчета $K$, и за промежуток времени $dt'$ в СО $K'$ происходит перемещение тела на величину $d\vec{\mathbf{r}}'$ из точки $M_1$ в точку $M'_2$ (рис. 5.2.). Промежутку $dt'$ соответствует промежуток времени $dt$ в СО $K$, за который радиус-вектор $\vec{\mathbf{r}}_0$ изменяется на $d\vec{\mathbf{r}}_0$. Поскольку СО $K'$ движется поступательно, все точки СО $K'$ относительно СО $K$ также перемещаются на вектор $d\vec{\mathbf{r}}_0$. В частности, такое же перемещение разделяет конечное положение тела $M'_2$ в СО $K'$ и конечное положение $M_2$ в СО $K$. Поэтому для перемещения тела в СО $K$ получаем

$$d\vec{\mathbf{r}} = d\vec{\mathbf{r}}' + d\vec{\mathbf{r}}_0. \tag{5.2}$$

Из сказанного во введении следует, что промежутки времени в обеих системах равны друг другу: $dt' = dt$. Поделив обе части уравнения (5.2) на величину $dt$, получим для скоростей следующее соотношение

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}' + \vec{\mathbf{v}}_0. \tag{5.3}$$

Здесь $\vec{\mathbf{v}}$ – скорость тела в СО $K$, $\vec{\mathbf{v}}'$– скорость тела в СО $K'$ и $\vec{\mathbf{v}}_0$ – скорость СО $K'$ в СО $K$.

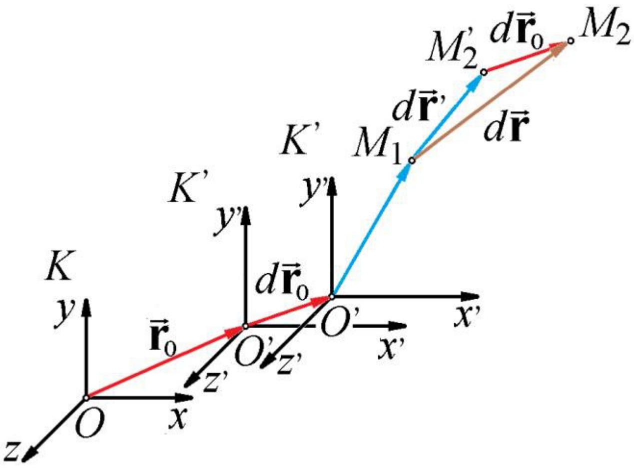



**Рис. 5.2.** СО $K'$ движется поступательно относительно СО $K$. Перемещение $d\vec{\mathbf{r}}$ тела относительно СО $K$ складывается из перемещения $d\vec{\mathbf{r}}'$ относительно $K'$ и перемещения $d\vec{\mathbf{r}}_0$ начало отсчета системы $K'$.

Аналогично соотношению (5.2) получаем соотношение для изменений скоростей тела в обеих системах:

$$d\vec{\mathbf{v}} = d\vec{\mathbf{v}}' + d\vec{\mathbf{v}}_0. \tag{5.4}$$

Если поделить соотношение (5.4) на величину $dt$ ($dt' = dt$), получим соотношение для векторов ускорений тела, измеренных в обеих системах отсчета:

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}' + \vec{\mathbf{a}}_0 \ , \tag{5.5}$$

здесь $\vec{\mathbf{a}}$ – ускорение тела в СО $K$, $\vec{\mathbf{a}}'$– ускорение тела в СО $K'$ и $\vec{\mathbf{a}}_0$ – ускорение СО $K'$ относительно СО $K$.

## 5.2 Переход к системе отсчета, вращающейся с постоянной угловой скоростью

Соотношение между мгновенными радиус-векторами в нерелятивистском механике не зависит от характера взаимного движения СО и в случае вращения системы $K'$ относительно СО $K$ сохраняет вид (5.1).

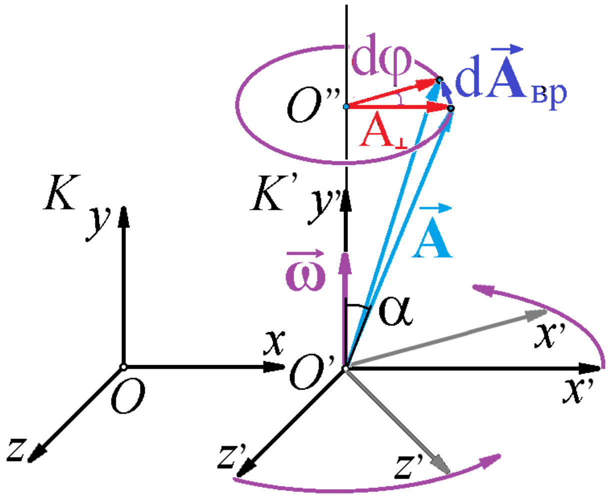



**Рис. 5.3.** Система $K'$ вращается с угловой скоростью $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ относительно СО $K$ вокруг оси у. Вектор $\vec{\mathbf{A}}$ покоится относительно СО $K'$. При повороте $K'$ на $d\varphi$ вектор $\vec{\mathbf{A}}$ получает приращение $d\vec{\mathbf{A}}_{вр}$ в СО $K$.

Обозначим $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ угловую скорость вращения системы $K'$ относительно СО $K$ (рис. 5.3.). Рассмотрим произвольный вектор $\vec{\mathbf{A}}$, который покоится относительно $K'$ и неколлинеарен вектору $\vec{\boldsymbol{\omega}}$. Для того чтобы найти изменение $d\vec{\mathbf{A}}_{вр}$ обусловленное вращением вектора $\vec{\mathbf{A}}$ относительно СО $K$ переместим вектор $\vec{\mathbf{A}}$ параллельным переносом в точку на оси вращения. На рисунке 5.3. в качестве такой точки выбрано начало координат $O'$. Вектор $\vec{\mathbf{A}}$ поворачивается вместе с СО $K'$, причем его конец двигается по окружности радиусом $A_\perp = \left|\vec{\mathbf{A}}\right|\sin\alpha$, где $\alpha$ — угол между векторами $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ и $\vec{\mathbf{A}}$. За промежуток времени $dt$ радиус $A_\perp$ поворачивается на угол $d\varphi = \omega dt$. Из-за малости угла $d\varphi$ модуль $d\vec{\mathbf{A}}_{вр}$ равен длине дуги, т. е. произведению угла и радиуса:

$$\left|d\vec{\mathbf{A}}_{вр}\right| = d\varphi A_\perp = \omega dt\left|\vec{\mathbf{A}}\right|\sin\alpha. \tag{5.6}$$

Векторы $\vec{\boldsymbol{\omega}}$, $\vec{\mathbf{A}}$ и $d\vec{\mathbf{A}}_{вр}$ образуют правую тройку векторов, следовательно, с учетом (5.6) можно утверждать, что

$$d\vec{\mathbf{A}}_{вр} = \left[\vec{\boldsymbol{\omega}}dt, \vec{\mathbf{A}}\right]. \tag{5.7}$$

Пусть за время $dt$ тело в СО $K'$ перемещается на вектор $d\vec{\mathbf{r}}'$ (из точки $M$ в точку $M'$, рис. 5.4). Из-за поворота СО $K'$ для наблюдателя в СО $K$ точка $M'$ (конечное положение тела в СО $K'$) за время наблюдения переходит в положение $M''$, а к вектору $d\vec{\mathbf{r}}'$ добавляется перемещение $d\vec{\mathbf{r}}'_{вр}$, обусловленное поворотом СО, т.е.

$$d\vec{\mathbf{r}} = d\vec{\mathbf{r}}' + d\vec{\mathbf{r}}'_{вр} \tag{5.8}$$

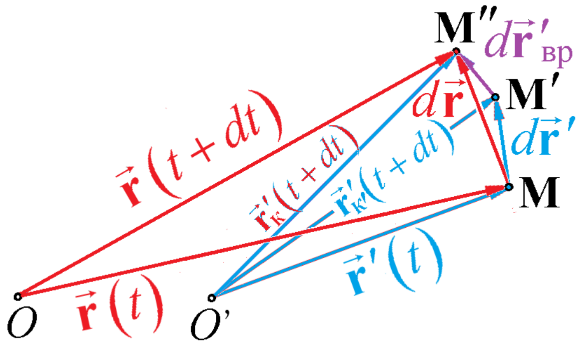



**Рис. 5.4.** Элементарное перемещение $d\vec{\mathbf{r}}$ тела относительно системы $K$ складывается из перемещения $d\vec{\mathbf{r}}'$ относительно системы $K'$ и перемещения $d\vec{\mathbf{r}}'_{вр}$, обусловленного вращением $K'$

Для перемещения обусловленного поворотом системы в соответствии с уравнением (5.7) получаем

$$d\vec{\mathbf{r}}'_{вр} = \vec{\boldsymbol{\omega}}dt, \vec{\mathbf{r}}' \tag{5.9}$$

Подставляя выражение (5.9) в уравнение(5.8), и деля обе части равенства на $dt$, получаем соотношение

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}' + \vec{\boldsymbol{\omega}}, \vec{\mathbf{r}}' , \tag{5.10}$$

где $\vec{\mathbf{v}}$ и $\vec{\mathbf{v}}'$ — скорости тела, измеряемые в СО $K$ и $K'$, соответственно, а $\vec{\mathbf{r}}'$ — радиус-вектор тела относительно любой точки оси вращения. Второе слагаемое в правой части уравнения (5.10) — это скорость точки системы $K'$, в которой находится тело в данный момент.

Для того чтобы найти связь ускорений в обеих системах рассмотрим из каких слагаемых складывается изменение правой части уравнения (5.10) с точки зрения наблюдателя в СО $K$. Относительно СО $K'$ за время $dt$ векторы $\vec{\mathbf{v}}'$ и $\vec{\mathbf{r}}'$ получают приращения $d\vec{\mathbf{v}}'$ и $d\vec{\mathbf{r}}'$, соответственно. Кроме этого из-за поворота самой $K'$ эти векторы получают дополнительные изменения $d\vec{\mathbf{v}}'_{вр}$ и $d\vec{\mathbf{r}}'_{вр}$. Изменение $d\vec{\mathbf{r}}'_{вр}$, как и раньше, определяется соотношением (5.9), $d\vec{\mathbf{v}}'_{\text{вр}}$ находим по формуле (5.7):

$$d\vec{\mathbf{v}}'_{\text{вр}} = \ \vec{\boldsymbol{\omega}}dt, \vec{\mathbf{v}}' \tag{5.11}$$

Таким образом, изменение $d\vec{\mathbf{v}}$ вектора скорости тела относительно СО $K$ представляется в следующем виде

$$d\vec{\mathbf{v}} = d\vec{\mathbf{v}}' + d\vec{\mathbf{v}}'_{\text{вр}} + \left[\vec{\boldsymbol{\omega}}, d\vec{\mathbf{r}}' + d\vec{\mathbf{r}}'_{\text{вр}}\right] \tag{5.12}$$

Учитывая (5.9) и (5.11), получаем

$$d\vec{\mathbf{v}} = d\vec{\mathbf{v}}' + \ \vec{\boldsymbol{\omega}}dt, \vec{\mathbf{v}}' \ + \ \vec{\boldsymbol{\omega}}, d\vec{\mathbf{r}}' \ + \left[\vec{\boldsymbol{\omega}}, \ \vec{\boldsymbol{\omega}}dt, \vec{\mathbf{r}}' \ \right]. \tag{5.13}$$

Деля обе части этого уравнения на промежуток времени $dt = dt'$ и учитывая, что $d\vec{\mathbf{r}}'/dt' = \vec{\mathbf{v}}'$, находим:

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}' + 2 \ \vec{\boldsymbol{\omega}}, \vec{\mathbf{v}}' \ + \left[\vec{\boldsymbol{\omega}}, \ \vec{\boldsymbol{\omega}}, \vec{\mathbf{r}}' \ \right] \tag{5.14}$$

Двойное векторное произведение в этом уравнении удобно выразить через вектор $\vec{\mathbf{R}}$, задающий положение тела относительно оси вращения (рис. 5). Модуль этого произведения:

$$\left\|\left[\vec{\boldsymbol{\omega}}, \ \vec{\boldsymbol{\omega}}, \vec{\mathbf{r}}' \ \right]\right\| = \omega^2 r' \sin\alpha = \omega^2 R. \tag{5.15}$$

Второй сомножитель в этом произведении (вектор $\vec{\mathbf{щ}}, \vec{\mathbf{r}}'$ ) направлен на рисунке 5.5 перпендикулярно плоскости рисунка от нас, а двойное векторное произведение направлено противоположно вектору $\vec{\mathbf{R}}$, поэтому с учетом (5.15) справедливо выражение

$$\left[\vec{\omega}, \ \vec{\omega}, \vec{\mathbf{r}}' \ \right] = -\omega^2 \vec{\mathbf{R}} \tag{5.16}$$

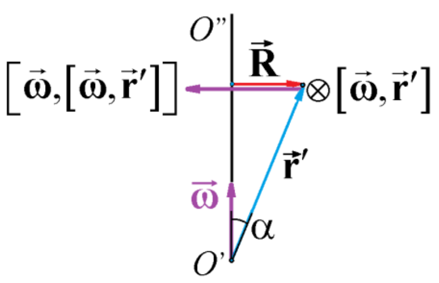



**Рис. 5.5.** Вектор $\vec{\boldsymbol{\omega}}, \vec{\mathbf{r}}'$ направлен перпендикулярно рисунку от нас. Двойное векторное произведение $\left[\vec{\boldsymbol{\omega}}, \ \vec{\boldsymbol{\omega}}, \vec{\mathbf{r}}' \ \right]$ направлено противоположно вектору $\vec{\mathbf{R}}$

Учитывая (5.16), получаем окончательный вид соотношения между ускорением $\vec{\mathbf{a}}$ относительно СО $K$ и ускорением $\vec{\mathbf{a}}'$ относительно

$K'$:

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}' + 2\ \vec{\boldsymbol{\omega}},\vec{\mathbf{v}}'\ - \omega^2\vec{\mathbf{R}}. \qquad (5.17)$$

Заметим, что последнее слагаемое в правой части этой формулы — это центростремительное ускорение, которое будет иметь тело в СО $K$, неподвижное относительно $K'$ (случай $\vec{\mathbf{a}}' = 0,\ \vec{\mathbf{v}}' = 0$).

В том случае, когда СО $K'$ вращается с постоянной угловой скоростью $\vec{\textbf{щ}}$ и ось вращения движется поступательно относительно СО $K$ со скоростью $\vec{\mathbf{v}}_0$ и ускорением $\vec{\mathbf{a}}_0$, можно на основе уравнений (5.3) (5.5), (5.10) и (5.17) получить общие формулы, связывающие скорости и ускорения в обеих системах:

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}' + \vec{\mathbf{v}}_0 + \ \vec{\boldsymbol{\omega}},\vec{\mathbf{r}}'\ , \qquad (5.18)$$

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}' + \vec{\mathbf{a}}_0 + 2\ \vec{\boldsymbol{\omega}},\vec{\mathbf{v}}'\ - \omega^2\vec{\mathbf{R}}. \qquad (5.19)$$

## 5.3 Второй закон Ньютона во вращающейся НИСО с поступательно двигающейся осью вращения.

Пусть система $K$ является инерциальной. Для тела массой $m$ в СО $K$ выполняется обычный второй закон Ньютона:

$$m\vec{\mathbf{a}} = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i\,. \qquad (5.20)$$

Здесь $\vec{\mathbf{F}}_i$ — силы взаимодействия данного тела со всеми остальными телами и полями.

Пусть СО $K'$ вращается с постоянной угловой скоростью $\vec{\boldsymbol{\omega}}$, и ось вращения движется поступательно относительно СО $K$ со скоростью $\vec{\mathbf{v}}_0$ и ускорением $\vec{\mathbf{a}}_0$. Тогда ускорение $\vec{\mathbf{a}}'$, которое имеет тело относительно $K'$, связано с ускорением $\vec{\mathbf{a}}$ соотношением (5.19). Выразим с помощью этого соотношения ускорение в левой части (5.20), оставим слагаемое $m\vec{\mathbf{a}}'$ слева, а остальные слагаемые перенесем в правую часть. В результате получим

$$m\vec{\mathbf{a}}' = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i - m\vec{\mathbf{a}}_0 + 2m\ \vec{\mathbf{v}}',\vec{\boldsymbol{\omega}}\ + m\omega^2\vec{\mathbf{R}}. \qquad (5.21)$$

Это уравнение по форме близкое к уравнению (5.20), и представляет второй закон Ньютона в НИСО $K'$. Второе, третье и четвертое слагаемое в правой части этого уравнения влияют на ускорение $\vec{\mathbf{a}}'$ тела относительно $K'$ наравне с силами взаимодействия. Эти слагаемые, обусловленные неинерциальностью $K'$, называются, соответственно:

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{пост}} = -m\vec{\mathbf{a}}_0 \text{ — поступательная сила инерции;} \tag{5.22}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{кор}} = 2m \ \vec{\mathbf{v}}', \vec{\boldsymbol{\omega}} \text{ — кориолисова сила инерции;} \tag{5.23}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{цб}} = m\omega^2\vec{\mathbf{R}} \text{ — центробежная сила инерции.} \tag{5.24}$$

Отметим особенности сил инерции. Эти силы:

— возникают в НИСО;

— не связаны с взаимодействием тел;

— пропорциональны инертной массе тела (массе, входящей во второй закон Ньютона).

В отличие от инертной массы масса, входящая в выражение для силы тяготения, называются гравитационной массой. Сила тяготения, действующая на данное тело, пропорциональна гравитационной массе тела. Экспериментально с высокой точностью проверено, что гравитационная масса пропорциональна инертной массе. Коэффициент пропорциональности для удобства обычно принимают равным единице. Равенство (пропорциональность) инертной и гравитационной масс заложено в основу теории, описывающей движение тел в НИСО со скоростями близкими к скорости света $c$. Эта теория называется общей теорией относительности Эйнштейна. Один из основополагающих принципов этой теории (принцип эквивалентности Эйнштейна) гласит: *все физические явления в однородном поле тяготения происходят совершенно так же, как и в соответствующем однородном поле сил инерции.*

## 5.4 Примеры проявления сил инерции

Ниже на нескольких примерах проиллюстрировано действие сил инерции (5.22) — (5.24).

Пусть вагон поезда (рис. 5.6) тормозится с постоянным ускорением $\vec{\mathbf{a}}_0$. Подвешенный к потолку на гибком подвесе светильник под действием поступательной силы инерции (5.22) отклоняется в направлении противоположном ускорению. Пусть ускорение поддерживается достаточно долго, чтобы затухли колебания светильника. Тогда в равновесии подвес будет отклонен от вертикали, поскольку для компенсации векторной суммы $m\vec{\mathbf{g}} + \vec{\mathbf{F}}_{\text{пост}}$ (силы тяжести и силы инерции), сила натяжения подвеса $\vec{\mathbf{T}} = - \ m\vec{\mathbf{g}} + \vec{\mathbf{F}}_{\text{пост}}$ должна быть направлена под углом к вертикали.

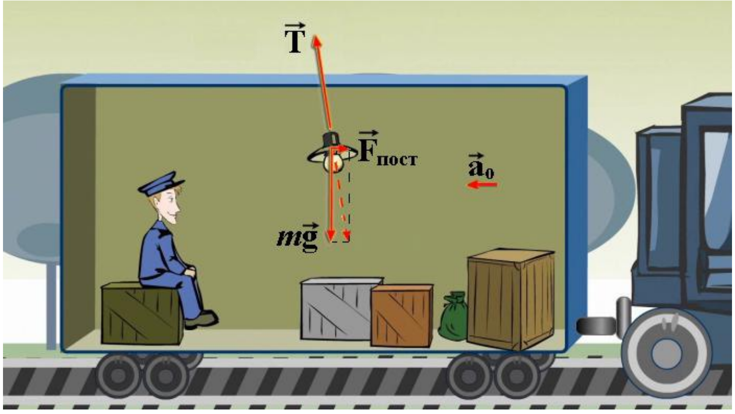



**Рис. 5.6.** Отклонение подвешенного светильника от вертикали в вагоне, замедляющем движение с ускорением $\vec{\mathbf{a}}_0$. Изображены силы, действующие на светильник, который покоится относительно вагона.

Рассмотрим груз, поднимаемый в лифте с ускорением $\vec{\mathbf{a}}_0$ (рис. 5.7).

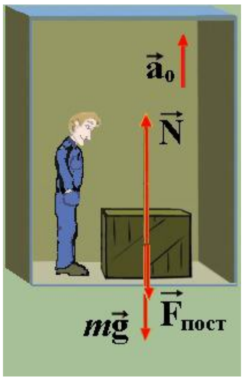



**Рис. 5.7.** Силы, действующие на груз в лифте, ускоряющемся вверх. Поступательная сила инерции дополнительно прижимает груз к полу.

Если ускорение $\vec{\mathbf{a}}_0$ направлено вверх, поступательная сила инерции дополнительно прижимает груз к полу лифта, увеличивая силу, с которой тело давит на пол. Что в свою очередь приводит к возрастанию сила нормальной реакции опоры $\vec{\mathbf{N}} = -\ m\vec{\mathbf{g}} + \vec{\mathbf{F}}_{пост}$ .

Действие кориолисовой силы (5.23) демонстрирует массивный маятник, подвешенный на длинном подвесе (маятник Фуко, рис 5.8). Большая масса позволяет маятнику совершать колебания достаточно долго, чтобы можно было заметить действие кориолисовой силы. С течением времени плоскость качаний маятника поворачивается по часовой стрелке в северном полушарии и против часовой стрелки в южном полушарии.

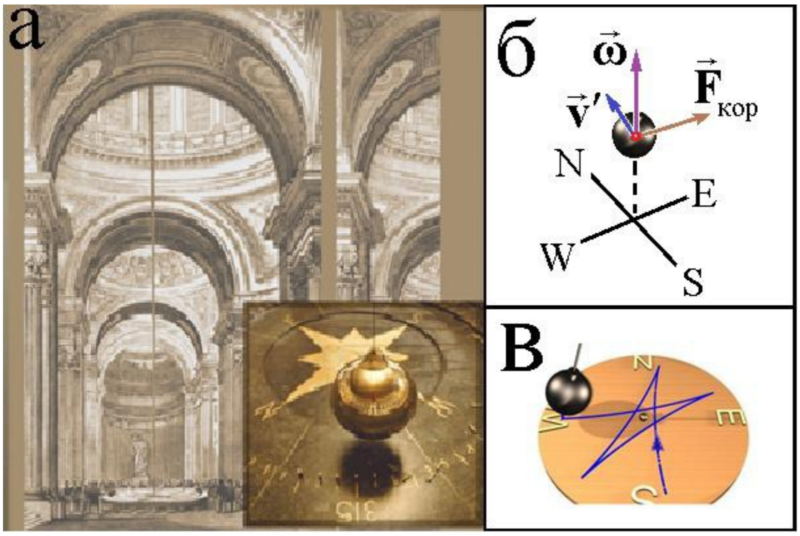



**Рис. 5.8.** Маятник Фуко: а) демонстрационный маятник Фуко (Париж, Пантеон, 1851 г.); б) направление кориолисовой силы инерции; в) отклоняясь направо по ходу движения, маятник выписывает своеобразную розетку.

Большие океанические течения под действием кориолисовой силы совершают круговые движения (рис 5.9), причем в северном полушарии эти движения происходят по часовой стрелке, в южном — против часовой стрелки.

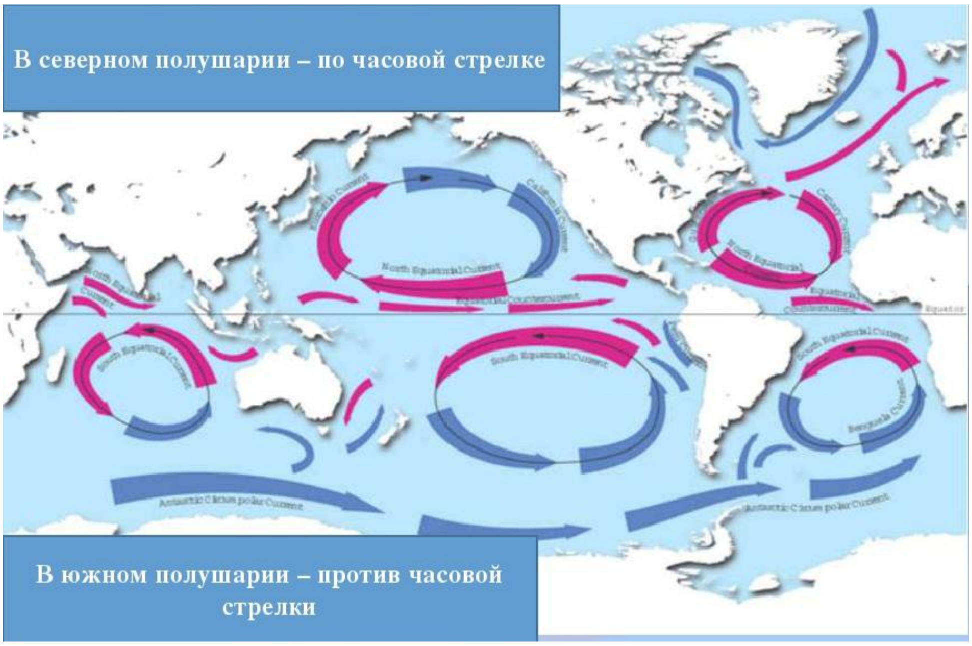



**Рис. 5.9.** Большие океанические течения под действием кориолисовой силы совершают круговые движения

Для иллюстрации действия центробежной силы рассмотрим систему, изображенную на рис. 5.10. На платформе, вращающейся с угловой скоростью $\vec{\omega}$, расположен массивный шарик $m$, прикрепленный пружиной к центру $O'$ платформы. Шарик покоится в СО, связанной с платформой. Действующая на шарик центробежная сила $\vec{F}_{цб}$ растягивает пружину настолько, что сила упругости $\vec{F}_{упр}$ пружины уравновешивает центробежную силу $\vec{F}_{цб}$.

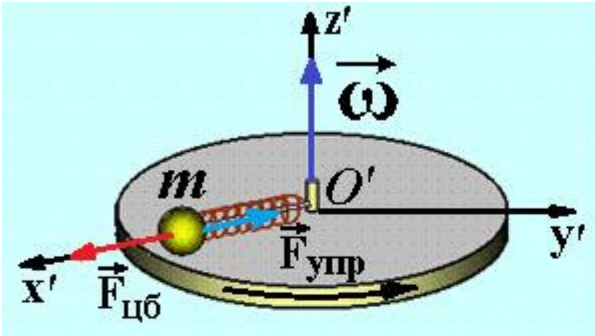
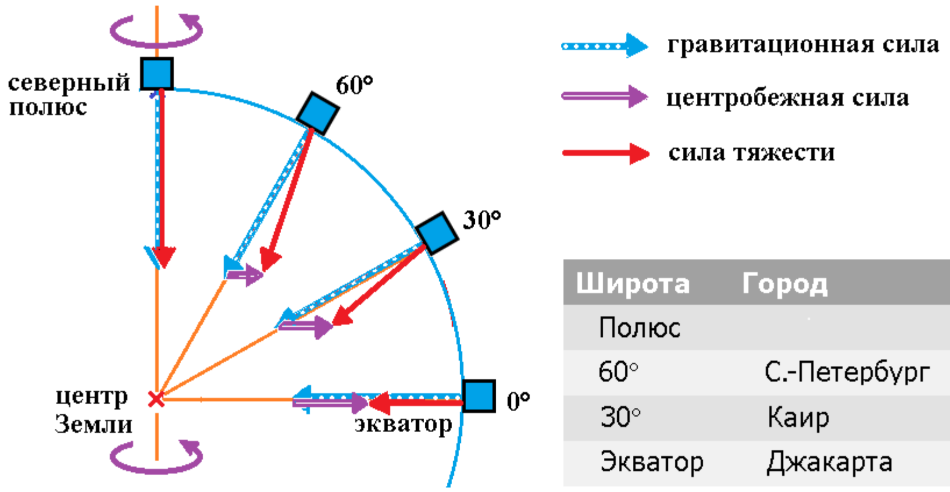



**Рис. 5.10.** Шарик, закрепленный на вращающейся платформе, покоится в СО, связанной с платформой. Сила упругости $\vec{F}_{упр}$ пружины уравновешивает центробежную силу $\vec{F}_{цб}$.

Центробежная сила вносит основной вклад в зависимость ускорения свободного падения от широты точки на поверхности Земли. Сила тяжести складывается из силы притяжения тела к Земле (гравитационной силы) и центробежной силы, связанной с суточным вращением (рис. 5.11). Гравитационная сила уменьшается с уменьшением широты из-за нешарообразности формы планеты, но сила тяжести ослабляется с уменьшением широты в первую очередь за счет возрастания центробежной силы. Значения ускорение свободного падения на полюсе и на экваторе различаются на 0,052 м/с$^2$. Около 65% этой разности обусловлено тем, что на экваторе центробежная сила, действуя противоположно гравитационной силе, уменьшает силу тяжести.




| Широта | Город | g, м/с$^2$ |
|---|---|---|
| Полюс | | 9.83216 |
| 60° | С.-Петербург | 9.81908 |
| 30° | Каир | 9.79321 |
| Экватор | Джакарта | 9.78030 |

**Рис. 5.11.** Сила тяжести складывается из гравитационной силы и центробежной силы. На рисунке центробежная сила сильно преувеличена. В таблице указаны значения ускорения свободного падения для разных широт.

# 6 Математическое приложение

В каждой естественной науке заключено столько истины, сколько в ней математики

*И. Кант*

Математика — это язык, на котором говорят все точные науки

*Н. Лобачевский*

## 6.1 Вектора. Операции над векторами

### 6.1.1 Определение векторов

**Вектор** (от лат. *vector*, «несущий») — математический объект, характеризующийся величиной и направлением. Если в пространстве задана система координат, т. е. определены единичные вектора (орты) $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$, то вектор однозначно задаётся набором своих проекций (рис. 6.1):

$$\vec{\mathbf{a}} = a_x \vec{\mathbf{i}} + a_y \vec{\mathbf{j}} + a_z \vec{\mathbf{k}} \tag{6.1}$$

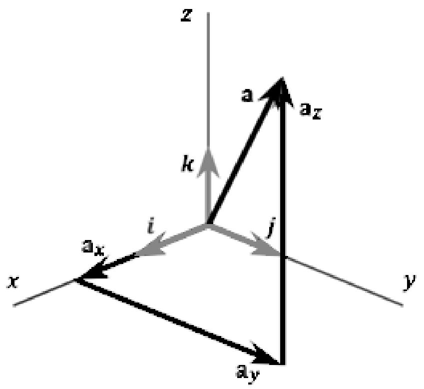



**Рис. 6.1**. Проекции вектора

Таким образом, чтобы определить вектор, достаточно задать тройку чисел — его проекций

$$\vec{\mathbf{a}} \Rightarrow \ a_x, a_y, a_z \ . \tag{6.2}$$

Вектора в физике отражают объективную реальность, они связаны с какой-либо физической величиной, существующей независимо от исследователя. В то же время выбор системы координат определяется обычно соображениями удобства и, следовательно, субъективен. Поэтому проекции вектора не постоянны, они изменяются при переходе к другим координатным осям, например, при повороте осей в плоскости XY (рис. 6.2). Нетрудно убедиться, что проекции вектора в старой и новой системах координат связаны соотношениями

$$\begin{cases} R'_x = R_x \cos\alpha + R_y \sin\alpha \\ R'_y = -R_x \sin\alpha + R_y \cos\alpha \end{cases}. \tag{6.3}$$

Понятно, что систему координат всегда можно «докрутить» до положения, когда одна из осей будет направлена вдоль вектора и у вектора останется только одна ненулевая проекция на эту ось. Зачастую такой выбор координат оказывается наиболее удобным.

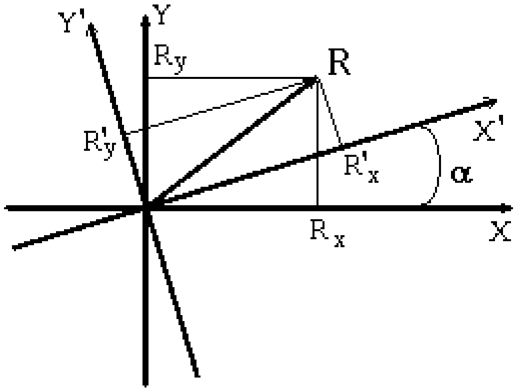



**Рис. 6.2**. Преобразование проекций при повороте координат

Помимо проекций, вектор характеризуется также своей длиной, или модулем:

$$a \equiv |\vec{\mathbf{a}}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,. \tag{6.4}$$

Обычно длина вектора обозначается той же буквой, что и вектор, но без стрелочки.

Вместо проекций вектора можно задать его длину и направляющие косинусы, т. е. косинусы углов между вектором и осями координат (рис. 6.3).

Очевидно, что проекции вектора связаны с направляющими косинусами соотношениями $a_x = a\cos\alpha$. Следовательно, сумма квадратов направляющих косинусов любого вектора равна единице:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{6.5}$$

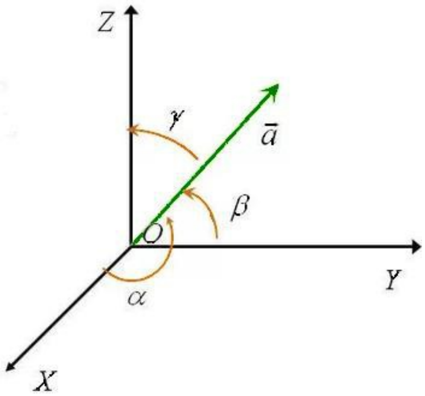



**Рис. 6.3**. Направляющие косинусы

### 6.1.2 Математические операции над векторами

При решении физических задач используются следующие операции над векторами.

**Сумма векторов**. Суммой векторов $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ является вектор $\vec{\mathbf{c}}$, каждая проекция которого равна сумме соответствующих проекций слагаемых: $c_x = a_x + b_x$ и т. д. Очевидно, что операция сложения векторов коммутативна, т. е. $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}$.

Геометрически сложение векторов может быть представлено двумя эквивалентными способами. В первом способе, когда оба вектора рисуются из одной из одной точки, а их сумма — вектор-диагональ параллелограмма (рис. 6.4, а). Во втором способе вектор $\vec{\mathbf{b}}$ откладывается из конца вектора $\vec{\mathbf{a}}$, а их сумма — вектор, замыкающий треугольник (рис. 6.4, б). Последний способ может быть легко обобщен на случай суммы произвольного числа векторов, когда они выстраиваются цепочкой друг за другом, а вектор суммы соединяет начало первого вектора с концом последнего (рис. 6.4. в).

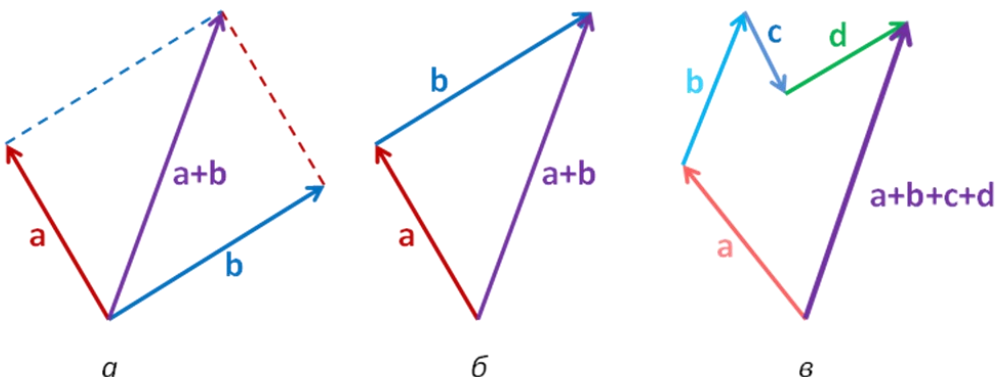



**Рис. 6.4**. Сложение векторов: параллелограммом (*а*), треугольником (*б*), нескольких векторов (*в*)

Вычитание векторов геометрически сводится к тому же сложению, только второй вектор берется с обратным знаком, т. е. направлен в противоположную сторону: $\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{a}} + \left(-\vec{\mathbf{b}}\right)$.

**Скалярное произведение**. Существует несколько видов умножения векторов. Скалярное произведение — такая операция над векторами, результатом которой является число (скаляр), равное сумме произведений одноименных проекций векторов:

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} \equiv \left(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}\right) = \sum_i a_i b_i = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{6.6}$$

Скалярное произведение коммутативно, т. е. $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{a}}$ и не зависит от выбора системы координат.

Геометрически скалярное произведение определяется через длины сомножителей и косинус угла между ними (рис. 6.5):

$$\left(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}\right) = ab\cos\left(\angle\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}\right) = ab\cos\varphi. \tag{6.7}$$

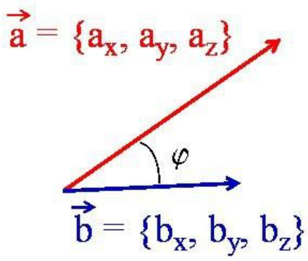



**Рис. 6.5**. К определению скалярного произведения векторов

Соотношение (6.7) используется для нахождения угла между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\left(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}\right)}{\left|\vec{\mathbf{a}}\right|\left|\vec{\mathbf{b}}\right|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \tag{6.8}$$

Скалярное произведение положительно, если угол между векторами острый и отрицательно, если угол между векторами тупой. Условием ортогональности (перпендикулярности) векторов является равенство нулю их скалярного произведения $\vec{\mathbf{a}} \perp \vec{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \left(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}\right) = 0$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$.

**Векторное произведение**. Векторное произведение — такая операция над векторами $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$, результатом которой является вектор $\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} \equiv \left[\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}\right]$ (рис. 6.6), обладающий следующими свойствами:

1. Его длина численно равна площади параллелограмма, построенно-

го на векторах-сомножителях:

$$|\vec{\mathbf{c}}| = |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|\sin\varphi. \tag{6.9}$$

2. Вектор $\vec{\mathbf{c}}$ перпендикулярен обоим перемножаемым векторам.
3. Направление вектора $\vec{\mathbf{c}}$ определяется так, чтобы тройка векторов $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$ была правой.

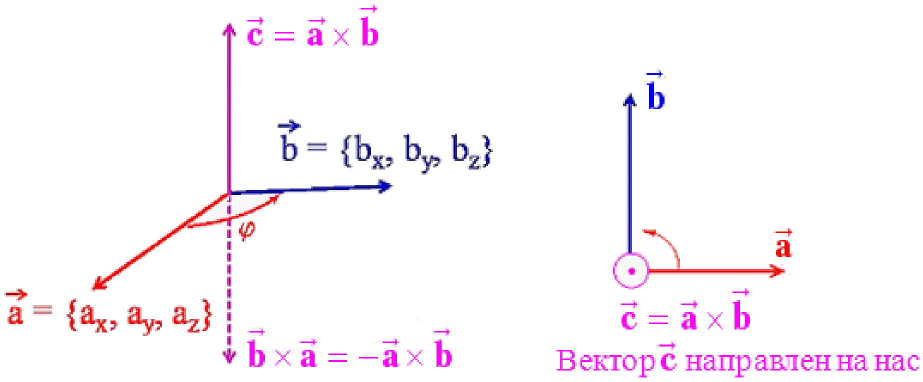



**Рис. 6.6**. Векторное произведение

Очевидно, что векторное произведение коллинеарных векторов равно нулю.

При определении направления векторного произведения используется правило правого винта. Если уговор об использовании правого винта заменить уговором об использовании левого винта, то ряд физических величин (угловая скорость, момент импульса, момент силы), связанных с этим уговором, изменят направление на противоположное. Такие векторы, направление которых зависит от указанного уговора, называют аксиальными (осевыми). Аксиальные векторы необходимо отличать от таких векторов как перемещение, скорость, ускорение, сила и др., называемых полярными. Направление полярного вектора не зависят от уговора об использовании того или иного винта, и в отличие от аксиального вектора каждый полярный вектор имеет определенную «точку приложения» (полюс). Заметим, что векторное произведение двух полярных или двух аксиальных векторов является аксиальным вектором, а векторное произведение полярного и аксиального векторов является полярным вектором. В физических соотношениях с двух сторон равенства, если равенство связывает два вектора, должны стоят векторы одинаковой природы, т. е. оба вектора должны быть либо оба полярными, либо оба аксиальными.

В отличие от обычного произведения чисел, векторное произведение не обладает свойствами коммутативности и ассоциативности,

$\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}\equiv-\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{a}}$, $(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}})\times\vec{\mathbf{c}}\neq\vec{\mathbf{a}}\times(\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{c}})$.

Проекции векторного произведения могут быть найдены с помощью определителя:

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}} &= \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \\
&= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{\mathbf{i}} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{\mathbf{j}} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{\mathbf{k}}.
\end{aligned}
\tag{6.10}
$$

Произведение трех векторов. В физике встречаются случаи, когда перемножаются три вектора. При этом возможны два варианта. Двойное векторное произведение может быть выражено через два скалярных произведения по формуле Лагранжа

$$\left[\left[\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}}\right],\vec{\mathbf{c}}\right]=\vec{\mathbf{b}}(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{c}})-\vec{\mathbf{c}}(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}}) \tag{6.11}$$

Смешанное произведение — это скалярное произведение одного вектора на векторное произведение двух других: $(\vec{\mathbf{a}},\left[\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}}\right])\equiv\vec{\mathbf{a}}\cdot(\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{c}})$. Смешанное произведение трех векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах (рис. 6.7).

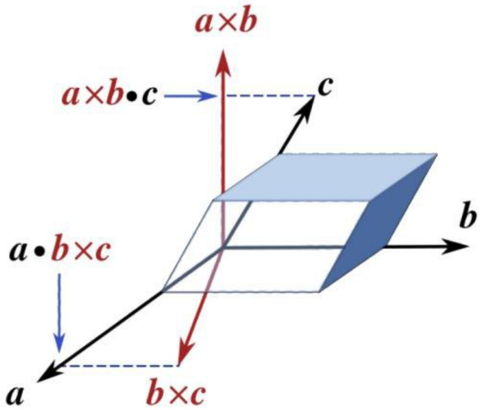



**Рис. 6.7**. Смешанное произведение векторов

Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке своих сомножителей: $\vec{\mathbf{a}}\cdot(\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{c}})=\vec{\mathbf{b}}\cdot(\vec{\mathbf{c}}\times\vec{\mathbf{a}})=\vec{\mathbf{c}}\cdot(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}})$. Смешанное произведение может быть записано через проекции векторов-сомножителей в виде определителя:

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \ \vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}} \ = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (6.12)$$

## 6.2 Преобразование координат

Выбор системы координат определяется симметрией физической задачи. Во многих случаях, особенно при анализе вращательного движения, декартовы координаты неудобны, поэтому приходится использовать другие системы координат. При этом приходится использовать формулы пересчета как самих координат, так и элементов площадей и объемов.

### 6.2.1 Полярные координаты

Полярная система координат — двумерная система координат, в которой положение точки на плоскости определяется расстоянием от начала координат $r$ и полярным углом $\varphi$ (рис. 6.8, *а*). Связь декартовых и полярных координат достаточно очевидна:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}. \qquad (6.13)$$

Элемент площади в полярных координатах (рис. 6.8, *б*) равен

$$dS = r dr d\varphi. \qquad (6.14)$$

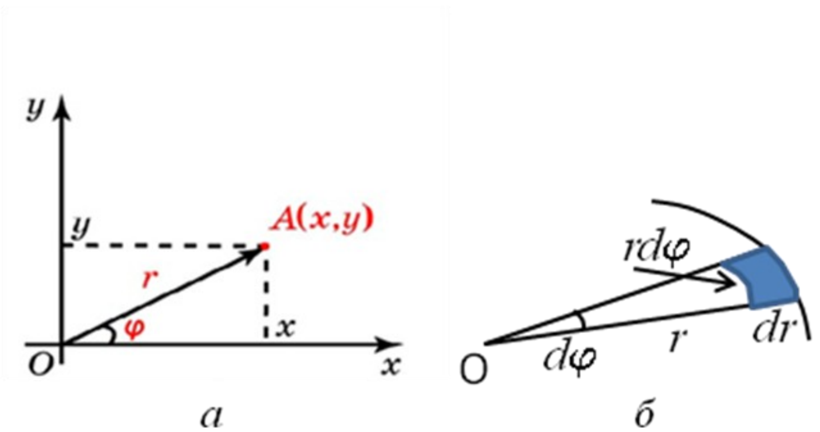



**Рис. 6.8**. Полярные координаты точки (*а*), элемент площади (*б*)

### 6.2.2 Цилиндрические координаты

Цилиндрическая система координат является расширением полярной системы на трехмерный случай путем добавления третьей координаты, задающей высоту точки над плоскостью (рис. 6.9, *а*). Цилиндрические координаты удобно использовать при решении физических задач с аксиальной симметрией, например, в механике — о вращении твердого тела вокруг фиксированной оси, за которую принимается ось Z.

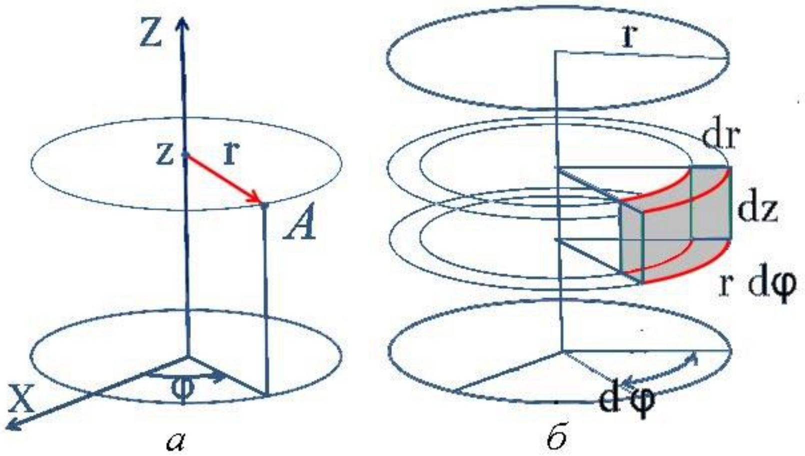



Рис. 6.9. Цилиндрические координаты точки (*а*), элемент объема (*б*)

Переход от цилиндрических координат к декартовым осуществляется по формулам

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi\,. \\ z = z \end{cases} \qquad (6.15)$$

Элемент объема в цилиндрических координатах (рис. 6.9, *б*) равен

$$dV = r dr dz d\varphi. \qquad (6.16)$$

### 6.2.3 Сферические координаты

Сферическими координатами точки являются расстояние до начала координат $r$, зенитный угол θ между радиус-вектором точки и осью Z и азимутальный угол φ между проекцией радиус-вектора на плоскость XY и осью X (рис. 6.10, *а*). Сферические координаты удобны при наличии центра симметрии, например, в астрономических задачах.

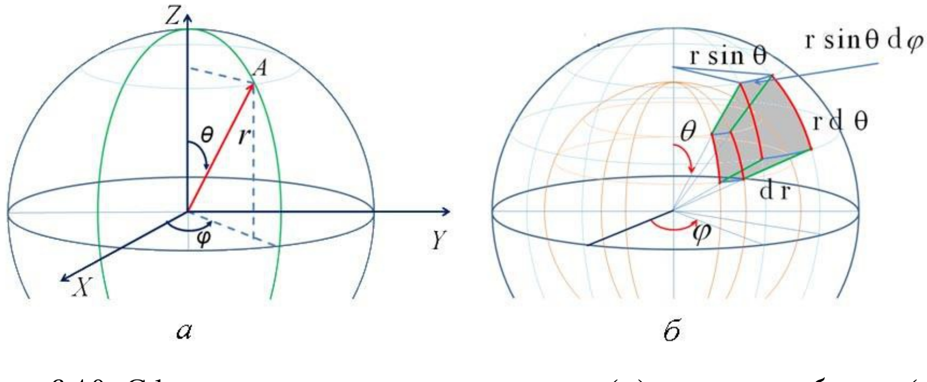



Рис. 6.10. Сферические координаты точки (*а*), элемент объема (*б*)

Переход от сферических координат к декартовым осуществляется по формулам

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}. \tag{6.17}$$

Элемент объема в сферических координатах (рис. 6.10, *б*) равен

$$dV = r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi. \tag{6.18}$$

## 6.3 Графический смысл производных и интегралов

### 6.3.1 Производная

Во многих физических соотношениях используется понятия производной. Графический смысл производной рассмотрим на примере мгновенной скорости $v_x$ движения вдоль оси $Ox$. По определению эта скорость в некоторый момент времени $t_1$ равна пределу, к которому стремится средняя скорость в интервале $\Delta t$ при стремление интервала к нулю:

$$v_x(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_1 + \Delta t) - x(t_1)}{\Delta t} \tag{6.19}$$

Прямая линия, проведенной на графике $x(t)$ через точки с абсциссами $t_1$ и $t_1 + \Delta t$ (рис. 6.11, *а*) является секущей, а выражение средней скорости $\dfrac{x(t_1 + \Delta t) - x(t_1)}{\Delta t} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ формально совпадает с выражением для углового коэффициента секущей к оси абсцисс. В пределе $\Delta t \to 0$ средняя скорость превращается в мгновенную, а секущая на графике превращается в касательную (рис. 6.11, *а*). При этом наклон секущей становится наклоном касательной к графику в момент времени $t_1$. Таким образом, мгновенная скорость $v_x(t_1)$ изображается угловым коэффициентом касательной к графику координаты в указанный момент времени.

С другой стороны предел (6.19) является производной по времени от функции $x(t)$ при значении аргумента $t_1$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_1 + \Delta t) - x(t_1)}{\Delta t} = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_1}. \tag{6.20}$$

Сказанное в предыдущем абзаце означает, что *значение производной от функции $x(t)$ при $t = t_1$ с учетом масштабов по осям изображается* *угловым коэффициентом касательной.* Чем круче идет график $x(t)$ около точки $t_1$, тем больше наклон касательной, и, следовательно, больше значение производной. Производную можно вычислить по любым двум точкам касательной как отношение $\dfrac{\Delta x_к}{\Delta t_к}$ (рис. 6.11, *б*) и тем самым графически найти значение производной.

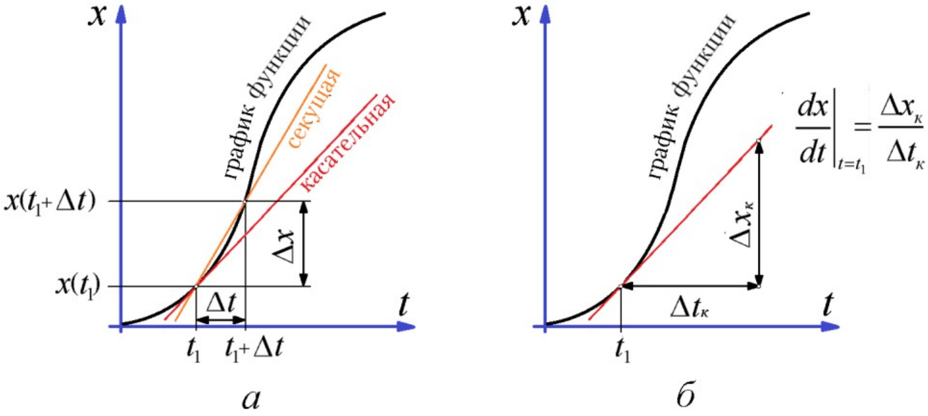



Рис. 6.11. К определению графического смысла производной
а) при переходе к пределу $\Delta t \to 0$ секущая превращается в касательную;
б) графическое вычисление производной

В случае изучения временн***о***й зависимости координаты график касательной имеет физический смысл — он представляет график движение с постоянной скоростью $v_x = \dfrac{\Delta x_к}{\Delta t_к}$.

Следует иметь в виду, что при изображении физических зависимостей графическим способом, понятия «угловой коэффициент касательной» и «тангенс угла наклона касательной» не совпадают. Тангенс угла наклона — величина безразмерная, она зависит от выбора масштаба по осям графика. Угловой коэффициент имеет размерность и не зависит от масштаба. На рис. 6.12 показан график одного и того же движения в двух разных масштабах по оси времени. Мгновенная скорость (а значит и угловой коэффициент) в обоих случаях одинакова и равна 1 м/с. В то же время на рис. 6.12, *а* тангенс угла наклона касательной равен 0,65, а на рис. 6.12, *б* — 1,30.

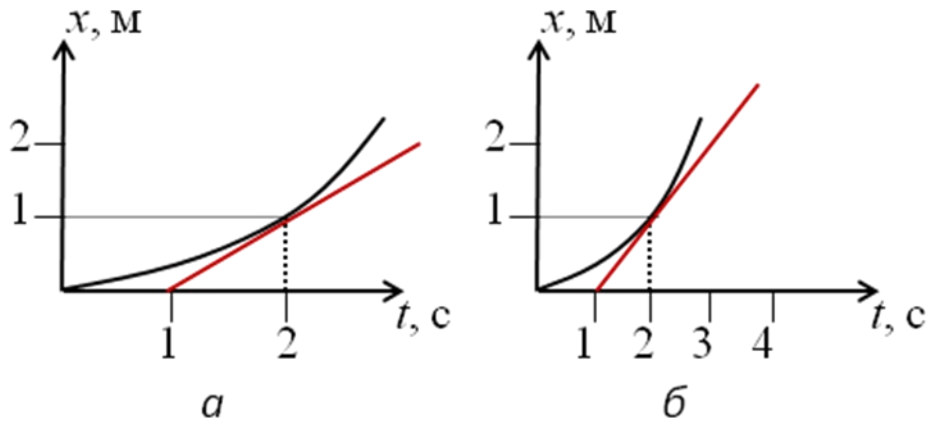


Рис. 6.12. Изменение наклона касательной при изменении масштаба

### 6.3.2 Интеграл

Графический смысл интеграла рассмотрим на примере вычисления пройденного пути $l$ по зависимости $v(t)$ мгновенной скорости от времени. Пусть движения происходит в интервале времени от $t_{нач}$ до $t_{кон}$. Обозначим $t_{нач}$ как $t_1$ , а $t_{кон}$ как $t_n$ , $n$ – достаточно большое натуральное число. Выберем промежуточные моменты времени $t_i$ *(i* = 2, 3, ..., $n$ – 1) так чтобы в каждом интервале $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ скорость изменялась незначительно относительно значения $v_i(t_i)$, и на каждом таком отрезке движение можно было бы приблизительно считать равномерным, а пройденный путь вычислять как $v_i(t_i)\Delta t_i$. Общий пройденный путь тогда можно вычислить как сумму отрезков, пройденных за каждый интервал $\Delta t_i$:

$$l \approx \sum_{i=1}^{n-1} v_i(t_i)\Delta t_i \qquad (6.21)$$

Произведение $v_i(t_i)\Delta t_i$ представляющее собой путь, пройденный телом за интервал времени $\Delta t_i$ со скоростью $v_i(t_i)$, формально равно площади (вычисленной с учетом масштабов по осям) прямоугольной полоски высотой $v_i$ и шириной $\Delta t_i$ (рис. 6.13, *а*). Следовательно, суммарная площадь под ступенчатой линией 1-1′-2-2′-3-3′-...-$n$ на графике 6.13, *а* приближенно изображает весь пройденный путь (6.21).

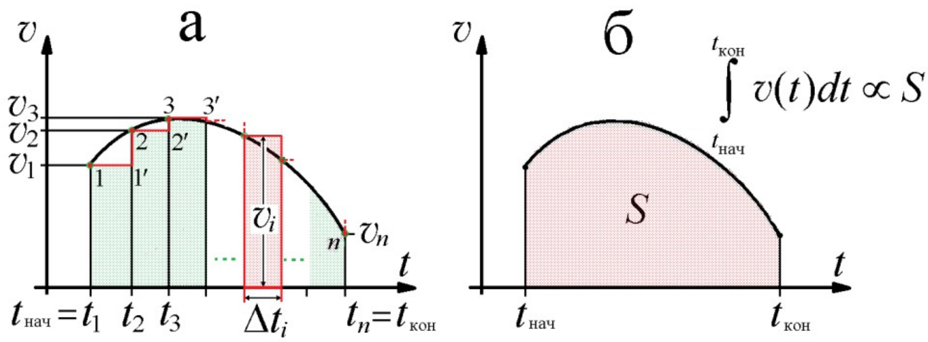



Рис. 6.13. К определению графического смысла интеграла:
а) площадь под ступенчатой линией – приближенное изображение пути, пройденного телом
б)площадь под графиком функции $v$ $t$ изображает значение интеграла от этой функции

При уменьшении длительности интервалов $\Delta t_i$ движение в каждом интервале $\Delta t_i$ можно с б**о**льшей точностью считать равномерным, и формула (6.21) становится более точной. При этом ступенчатая линия 1-1′-2-2′-3-3′-...-$n$. в пределе совпадает с графиком скорости, а площадь под ступенчатой линией — с площадью под графиком скорости. Это означает, что *площадь под графиком скорости изображает точное значение пройденного пути.*

Сумма (6.21) называется интегральной суммой для функции $v(t)$, а предел, к которому стремится сумма (6.21) при измельчении интервалов аргумента $t$ — интегралом от функции $v(t)$ в пределах от $t_{нач}$ до $t_{кон}$. Следовательно, для пройденного пути имеем

$$l = \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta t_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n-1} v(t_i)\Delta t_i = \int_{t_{нач}}^{t_{кон}} v(t)dt\,. \qquad (6.22)$$

Из сказанного выше вытекает, что площадь под графиком функции $v(t)$ между абсциссами $t_{нач}$ и $t_{кон}$ на рисунке 6.13, б изображает в некотором масштабе значение интеграла от этой функции в пределах от $t_{нач}$ до $t_{кон}$.

## Литература

1. Иродов И. Е. Курс общей физики. Т. 1. Механика. Основные законы.
2. Савельев И. В. Курс физики. Т. 1. Механика. Молекулярная физика.
3. Детлаф А. А., Яворский Б. М. Курс физики.

4. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Т. 1. Механика
5. Берклеевский курс физики. Том 1. Механика. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М.
6. Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. Фейнмановские лекции по физике. Том 1. Современная наука о природе, законы механики.